Prof. Dr. Günther Greiner
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung
der Universität Erlangen–Nürnberg

15. Februar 2011

Algorithmik kontinuierlicher Systeme — 15. Februar 2011

Angaben zur Person (Bitte in DRUCKSCHRIFT ausfüllen!):

Name, Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studienfach: ....

Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen !

Bewertung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max. Punktzahl	4	11	6	8	10	12	12	10	9	8
Erreichte Punkte										

Gesamtpunktzahl	
Note	

Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit.
- Hilfsmittel (außer Schreibmaterial **und** Taschenrechner) sind nicht zugelassen. Andere elektronische Geräte sind auszuschalten.
- Fragen zu den Prüfungsaufgaben werden grundsätzlich nicht beantwortet.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf das jeweilige Aufgabenblatt geschrieben werden. Sollte der Platz nicht reichen, so verwenden Sie die Zusatz-Seiten am Ende der Klausur. Fügen Sie einen Hinweis in Ihre Lösung ein, dass die Lösung auf den Zusatz-Seiten fortgesetzt wurde und beschriften Sie diese mit Namen und Aufgabennummer.
- Es können durch die Aufsicht zusätzlich Seiten eingeheftet werden, sollte mehr Platz benötigt werden. Bitte beschriften Sie den Kopf dieser Seiten mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer. Streichen Sie alles, was nicht bewertet werden soll doppelt aus.
- Auf Ihrem Platz befinden sich einige lose Blätter Schmierpapier. Bei Bedarf können Sie zusätzliches Schmierpapier von der Aufsicht anfordern. Das Schmierpapier muss abgegeben werden, es wird aber nicht bewertet.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung in der Universitätsklinik nachgewiesen werden. Melden Sie sich bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, es sind alle zehn Aufgaben mit 90 Punkten zu bearbeiten.
- Überprüfen Sie die Prüfungsaufgaben auf Vollständigkeit (28 Seiten inklusive Deckblatt) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen und die Erklärungen auf dieser Seite zu unterschreiben.
- Viel Erfolg!

Erklärungen

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 15. Februar 2011 ....
(Unterschrift)

Ich bin damit einverstanden, dass mein Prüfungsergebnis unter Angabe der Matrikelnummer anonymisiert veröffentlicht wird:

ja: ☐ nein: ☐

Erlangen, 15. Februar 2011 ....
(Unterschrift)

1 Komplexität (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Komplexität der folgenden Operationen (unter der Annahme, dass die Länge von Vektoren n und die Größe von Matrizen $n \times n$ ist)!

Inneres Produkt zweier Vektoren	**O** ( )
Tensorprodukt zweier Vektoren	**O** ( )
Lösen eines Gleichungssystems mittels Thomas Algorithmus	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ für k-diagonale Matrizen $\mathbf{A}$	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ bei Kenntnis der LU-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$	**O** ( )
Bestimmen der 1-Norm einer Matrix ($\|\|\|M\|\|\|_1$)	**O** ( )
Invertieren einer Matrix	**O** ( )
Bestimmung eines einzelnen Punktes auf einer Bézier-Kurve mit n Kontrollpunkten mit dem Algorithmus von de Casteljau	**O** ( )

2 Interpolation (11 Punkte)

Gegeben seien folgende Punkte:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	12	72

a) Bestimmen Sie die Funktion $l(x) : [0, 3] \mapsto \mathbb{R}$, welche obige Werte stückweise linear interpoliert.

Zur Erinnerung:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	12	72

b) Berechnen Sie die Koeffizienten des Polynoms $a(x)$ in der NEWTON-Basis, welches die obigen Werte interpoliert. Verwenden Sie dazu das Schema von AITKEN-NEVILLE. Geben Sie anschließend das Polynom $a(x)$ in Monombasis an.

Zur Erinnerung:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	12	72

c) AITKEN-NEVILLE löst ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{c} = \vec{y}$, wobei c_i die Koeffizienten des Polynoms in der NEWTON-Basis und y_i die Datenwerte sind. Geben Sie die Matrix $\mathbf{A}$ für obige Funktionswerte an.

d) Warum ist das Interpolieren mit Hilfe der NEWTON-Basis rechnerisch weniger aufwändig als mit der Monombasis? Begründen Sie ihre Antwort. **Hinweis:** Argumentieren Sie mit der Struktur der Systemmatrizen.

3 LU-Zerlegung (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix **A** mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die **LU**-Zerlegung (ohne Pivotisierung) von **A**.

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{B}$ sowie deren $\mathbf{LU}$-Zerlegung und ein Vektor $\vec{b}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Lösen Sie $\mathbf{B}\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der $\mathbf{LU}$-Zerlegung.

4 Eigenschaften von Bézier-Kurven (8 Punkte)

Gegeben sei eine Bézier-Kurve $\vec{f}(u)$ vom Grad n, deren Kontrollpunkte $\vec{b}_i$, sowie die zugehörigen Bernsteinpolynome $B_i^n(u)$.

a) Nennen Sie zusätzlich zur Endpunktinterpolation drei weitere Formeigenschafen von Bézier-Kurven:

b) Zeigen Sie, dass die Endpunktinterpolation für Bézier-Kurven gilt ($\vec{f}(0) = \vec{b}_0 \wedge \vec{f}(1) = \vec{b}_n$). Betrachten Sie hierfür zunächst die Bersteinpolynome.

c) Für die Ableitungen der Bernsteinpolynome gilt:

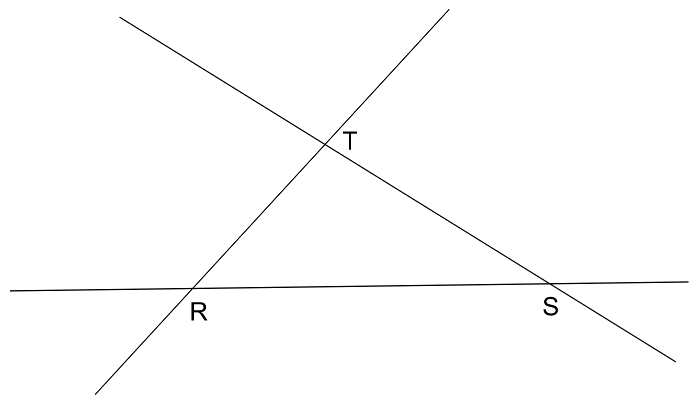
$$\frac{\partial B_i^n(u)}{\partial u} = n \cdot \left(B_{i-1}^{n-1}(u) - B_i^{n-1}(u)\right), \text{ mit } B_{-1}^{n-1}(u) = B_n^{n-1}(u) = 0$$

Zeigen Sie damit, dass $\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u}$ eine Bézier-Kurve vom Grad $n-1$ ist und geben Sie deren Kontrollpunkte an!

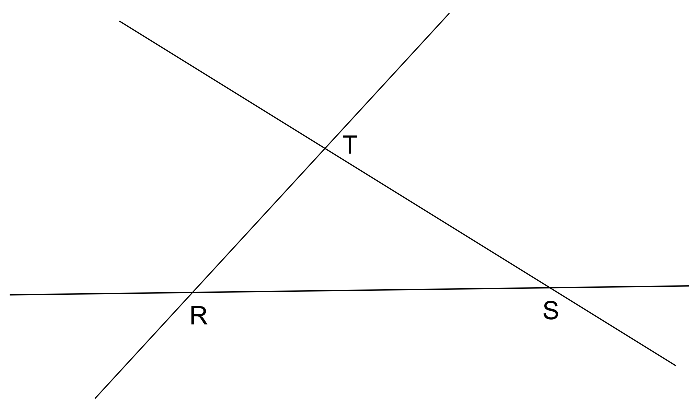
5 Baryzentrische Koordinaten (10 Punkte)

Gegeben sei jeweils ein Dreieck $\triangle RST$, sowie die zugehörigen baryzentrischen Koordinaten ρ, σ, τ. Dabei ist jeweils ρ das Gewicht von R, σ das Gewicht von S und τ das Gewicht von T.

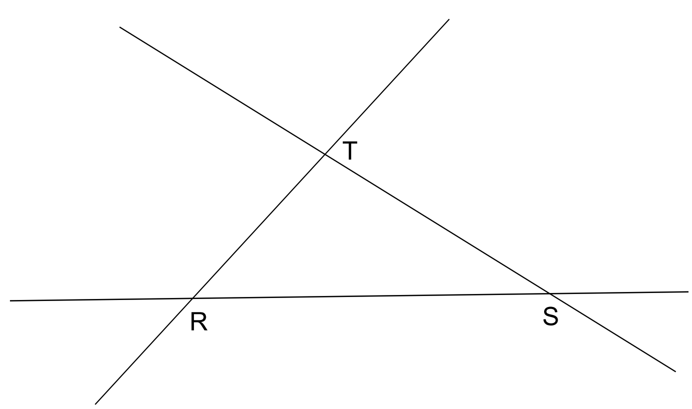
a) Markieren Sie in der Zeichnung den Bereich in dem $\rho < 0 \wedge \sigma > 0 \wedge \tau < 0$



b) Markieren Sie in der Zeichnung den Bereich in dem $\rho > 0 \wedge \sigma < 0 \wedge \tau = 0$

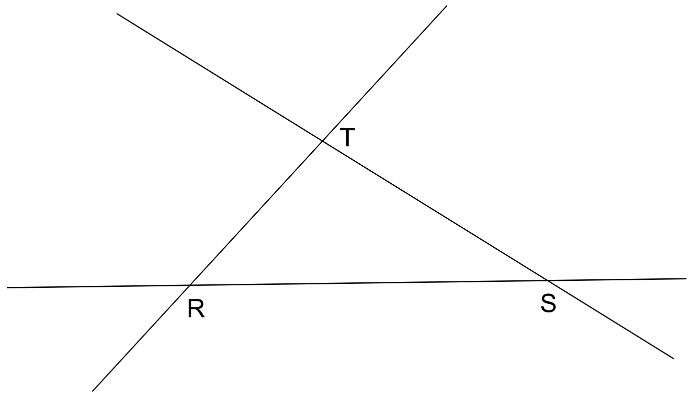


c) Markieren Sie in der Zeichnung den Bereich in dem $\rho = 0 \wedge \sigma = 0$



d) Markieren Sie in der Zeichnung die folgenden Punkte:

- $P_0 : [\rho_0, \sigma_0, \tau_0] = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0]$
- $P_1 : [\rho_1, \sigma_1, \tau_1] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$
- $P_2 : [\rho_2, \sigma_2, \tau_2] = [-2, 1, 1]$



e) Seien nun $R = [1, -1]^T$, $S = [4, 1]^T$ und $T = [2, 3]^T$. Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten für den folgenden Punkt bezüglich $\triangle RST$:

- $Q_0 = [6, 9]^T$

6 Singulärwertzerlegung (12 Punkte)

Gegeben sei die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$:

$$\underbrace{\frac{1}{24}\begin{bmatrix} -16 & -8 & -4 & 4 \\ -8 & -4 & -20 & -16 \\ -11 & -19 & -5 & -13 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{6}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{4} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T}.$$

a) Bestimmen Sie für die Matrix $\mathbf{A}$:

- die Singulärwerte:

- den Rang:

- den Bildraum (welche Vektoren spannen den Bildraum auf?):

- den Kern (welche Vektoren spannen den Kern auf?):

- und die Konditionszahl bzgl. der Euklidischen-Norm $|||\cdot|||_2$:

Zur Erinnerung:

$$\underbrace{\frac{1}{24}\begin{bmatrix}-16 & -8 & -4 & 4\\ -8 & -4 & -20 & -16\\ -11 & -19 & -5 & -13\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{6}{4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{4} & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T}.$$

b) Lösen Sie die folgende Gleichung mittels der Pseudo-Inversen.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix}12\\ -6\\ 0\end{bmatrix}.$$

Zur Erinnerung:

$$\underbrace{\frac{1}{24}\begin{bmatrix}-16 & -8 & -4 & 4\\ -8 & -4 & -20 & -16\\ -11 & -19 & -5 & -13\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{6}{4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{4} & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T}.$$

c) Bestimmen Sie die Matrix vom Rang 1, die $\mathbf{A}$ im Sinne der Frobenius-Norm am besten approximiert.

7 Programmierung (12 Punkte)

Die Klasse `BezierCurve` repräsentiert eine Bézier-Kurve. In dieser Aufgabe sollen Sie ausgewählte Methoden dieser Klasse implementieren (verwenden Sie `C++` Syntax). Entgegen der Übung ist **keine** Fehlerbehandlung erforderlich!

```
class BezierCurve {
public:
    //! Erstellt eine BezierKurve aus numCPs Kontrollpunkten, die Punkte stammen dabei aus CPs
    BezierCurve(const Point *CPs, int numCPs);

    //! Destruktor
    ~BezierCurve();

    //! Entfernt den i-ten Kontrollpunkt der Kurve
    void removeControlPoint(int idx);

    //! Wertet die Kurve am Parameterwert t aus und gibt den Punkt zurueck
    Point deCasteljau(float t) const;

    //! Erhoeht den Grad der Kurve um eins, ohne den Verlauf zu veraendern
    void degreeElevation();

    //! Punktspiegelung der Kurve an p
    void reflectCurve(const Point &p);

private:
    Point *CPs;             //! Kontrollpunkte der Kurve
    int   numCPs;           //! Anzahl der Kontrollpunkte
};
```

Die Klasse `BezierCurve` verwendet die gegebene Implementierung eines Punktes im 3D mit folgender Schnittstelle:

```
class Point {
public:
    Point();                          //! Konstruktor: Initialisiert alle Komponenten mit 0.0f
    Point(float x, float y, float z); //! Konstruktor: Setzt die Membervariablen entsprechend
    Point(const Point &other);        //! Copy Konstruktor

    //! Operatorueberladungen: Fuert die jeweilige Operation komponentenweise durch
    void operator+=(const Point &other);
    void operator-=(const Point &other);
    Point operator+(const Point &other) const;
    Point operator-(const Point &other) const;
    Point operator*(const float other) const;
    Point& operator=(const Point &other);

    float x, y, z;    //! Komponenten des Punktes
};
```

Bitte wenden!

Hinweis: Achten Sie stets auf korrektes Speichermanagement!

a) Implementieren Sie Konstruktor sowie Destruktor (Sie können davon ausgehen, dass dem Konstruktor valide Parameter übergeben werden, also dass die Anzahl der in `CPs` gespeicherten Kontrollpunkte gleich `numCPs` ist):

```
BezierCurve::BezierCurve(const Point *CPs, int numCPs) {









}

BezierCurve::~BezierCurve() {



}
```

b) Implementieren Sie folgende Methode (Sie können davon ausgehen, dass `idx` ein valider Index ist):

```
void BezierCurve::removeControlPoint(int idx) {















}
```

c) Implementieren Sie folgende Methode, welche die Bézier-Kurve an der Stelle `t` mittels DeCasteljau auswertet:

```
Point BezierCurve::deCasteljau(float t) const {

}
```

d) Um den Grad einer BÉZIER-Kurve zu erhöhen wird die folgende Formel verwendet: $Q_0 = P_0$, $Q_{n+1} = P_n$, $Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} P_i$, wobei n der ursprüngliche Grad der Kurve ist. Implementieren Sie anhand dieser Formel folgende Methode:

```
void BezierCurve::degreeElevation() {

}
```

e) Implementieren Sie folgende Methode, die die Kurve am Punkt `p` spiegelt:

```
void BezierCurve::reflectCurve(const Point &p) {

}
```

8 Numerische Integration (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 64x^3$. Das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ soll mit Hilfe von numerischer Integration näherungsweise berechnet werden. Dabei sollen verschiedene Verfahren verwendet werden.

a) Verwenden Sie die iterierte Trapezregel für die Partition $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

b) Verwenden Sie die iterierte Trapezregel für die Partition $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse von a) und b) und führen Sie einen Schritt des Romberg-Verfahrens durch.

d) Verwenden Sie die Simpson-Regel für die Partition $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

e) Verwenden Sie die iterierte Simpson-Regel für die Partition $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

f) Was ist Fehlerordnung der iterierten Trapezregel in Abhängigkeit der Schrittweite h?

g) Was ist Fehlerordnung der iterierten Simpson-Regel in Abhängigkeit der Schrittweite h?

9 Matrix-Norm und Kondition (9 Punkte)

a) Betrachten Sie die beiden folgenden Funktionen:

$$f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad : \quad f(x) = x^{\pi} \quad , \qquad g(x) = x^{1/\pi}$$

Beide sollen mittels eines (nicht näher spezifizierten) numerischen Verfahrens in der Nähe von 1 ($x \approx 1$) ausgewertet werden.

Für welche Funktion ist dieses Problem besser konditioniert? Begründen sie ihre Antwort.

b) Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die folgenden Matrix-Normen

$|||\mathbf{A}_1|||_1 =$

$|||\mathbf{A}_1|||_2 =$

$|||\mathbf{A}_2|||_\infty =$

$|||\mathbf{A}_2|||_1 =$

$|||\mathbf{A}_3||_1 =$

$|||\mathbf{A}_3|||_2 =$

Zur Erinnerung:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Konditionszahlen der beiden Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_3$ bzgl. einer von Ihnen gewählten Norm. Spezifizieren Sie auch die gewählte Norm.

d) Die folgenden beiden Gleichungssysteme wurden aufgestellt zur Schnittpunktsbestimmung von zwei Geraden.

Problem $\mathbf{SP}_1$:

$$\begin{aligned} 9x - 2y &= -3 \\ 4x + y &= 5 \end{aligned}$$

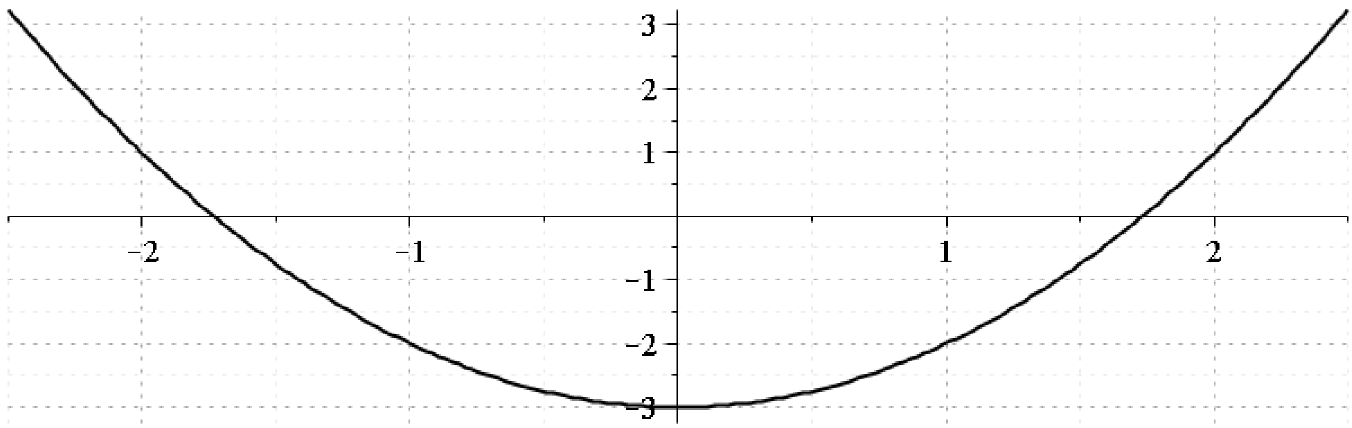
Problem $\mathbf{SP}_2$:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 1 \\ -x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

Welches dieser beiden Probleme ist besser konditioniert? Begründen Sie ihre Aussage anhand der Gleichungen. Berechnen Sie **keine** Konditionszahlen!

10 Nullstellensuche (8 Punkte)

a) Im Folgenden soll mittels Sekantenverfahren eine Nullstelle der unten eingezeichneten Parabel ermittelt werden. Gegeben sind dabei die Startwerte $x_0 = 1.5$ sowie $x_1 = -2$. Führen Sie **zeichnerisch** zwei Schritte des Sekantenverfahrens durch. Ermitteln Sie also zeichnerisch x_2 und x_3. Achten Sie darauf, dass die Zwischenschritte erkennbar sind.



b) Gegeben ist nun die Funktion $f(x) = x^2 - 4$. Führen sie **rechnerisch** zwei Schritte des Sekantenverfahrens durch mit den Startwerten $x_0 = 3$ und $x_1 = -1$. Ermitteln Sie also rechnerisch x_2 und x_3.

c) Gegeben ist das folgende nicht lineare Gleichungssystem:

$$y + z = -1$$
$$y^2 - z = 4$$

Das Gleichungssystem soll mittels NEWTON-Verfahren gelöst werden. Führen Sie hierzu **eine** NEWTON-Iteration durch. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = [y, z]^T = [-1, 1]^T$.