Prof. Dr. Günther Greiner
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung
der Universität Erlangen–Nürnberg

30. Juli 2010

Algorithmik kontinuierlicher Systeme — 30. Juli 2010

Angaben zur Person (Bitte in DRUCKSCHRIFT ausfüllen!):

Name, Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studienfach: ....

Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen !

Bewertung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max. Punktzahl	4	8	10	10	8	7	10	12	11	10
Erreichte Punkte										

Gesamtpunktzahl	
Note	

Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit.
- Hilfsmittel (außer Schreibmaterial **und** Taschenrechner) sind nicht zugelassen. Andere elektronische Geräte sind auszuschalten.
- Fragen zu den Prüfungsaufgaben werden grundsätzlich nicht beantwortet.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf das jeweilige Aufgabenblatt geschrieben werden. Sollte der Platz nicht reichen, so verwenden Sie die Zusatz-Seiten am Ende der Klausur. Fügen Sie einen Hinweis in Ihre Lösung ein, dass die Lösung auf den Zusatz-Seiten fortgesetzt wurde und beschriften Sie diese mit Namen und Aufgabennummer.
- Es können durch die Aufsicht zusätzlich Seiten eingeheftet werden, sollte mehr Platz benötigt werden. Bitte beschriften Sie den Kopf dieser Seiten mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer. Streichen Sie alles, was nicht bewertet werden soll doppelt aus.
- Auf Ihrem Platz befinden sich einige lose Blätter Schmierpapier. Bei Bedarf können Sie zusätzliches Schmierpapier von der Aufsicht anfordern. Das Schmierpapier muss abgegeben werden, es wird aber nicht bewertet.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung in der Universitätsklinik nachgewiesen werden. Melden Sie sich bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, es sind alle zehn Aufgaben mit 90 Punkten zu bearbeiten.
- Überprüfen Sie die Prüfungsaufgaben auf Vollständigkeit (29 Seiten inklusive Deckblatt) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen und die Erklärungen auf dieser Seite zu unterschreiben.
- Viel Erfolg!

Erklärungen

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 30. Juli 2010 ....

(Unterschrift)

Ich bin damit einverstanden, dass mein Prüfungsergebnis unter Angabe der Matrikelnummer anonymisiert veröffentlicht wird:

ja: ☐ nein: ☐

Erlangen, 30. Juli 2010 ....

(Unterschrift)

1 Komplexität (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Komplexität der folgenden Operationen (unter der Annahme, dass die Länge von Vektoren n und der Größe von Matrizen $n \times n$ ist)!

Matrix-Skalar-Multiplikation (vollbesetzte Matrix)	**O** ( )
Bestimmung des Quadrates $\mathbf{A}^2$ einer vollbesetzten Matrix $\mathbf{A}$	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ für tri-diagonale Matrizen $\mathbf{A}$	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ für k-diagonale Matrizen $\mathbf{A}$	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ bei Kenntnis der QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$	**O** ( )
Bestimmen der EUKLIDISCHEN Norm eines Vektors	**O** ( )
Bestimmung der LU-Zerlegung einer vollbesetzten Matrix	**O** ( )
Bestimmung eines einzelnen Punktes auf einer BÉZIER-Kurve mit n Kontrollpunkten mit dem Algorithmus von DE CASTELJAU	**O** ( )

2 Beantworten Sie die folgenden Fragen (8 Punkte)

a) Produzieren die folgenden Operationen bei binärer Fließkommadarstellung, mit ausreichendem Speicherplatz für den Exponenten, **keinen** Fehler?

ja	nein	
◯	◯	$A = 10$
◯	◯	$A = B \cdot 0.25$
◯	◯	$A = \log_4(64.0)$
◯	◯	$A = B \cdot 32$
◯	◯	$A = \frac{1}{10}$
◯	◯	$A = 2^B$

b) Ist die Fehlerfortpflanzung bei folgenden Operationen (relativer Fehler) unproblematisch?

ja	nein	
◯	◯	Division
◯	◯	Addition
◯	◯	Subtraktion
◯	◯	Potenzierung

c) Können die folgenden Verfahren zur numerischen Berechnung von Integralen verwendet werden?

ja	nein	
◯	◯	SIMPSON-Regel
◯	◯	NEWTON-Verfahren
◯	◯	cg-Verfahren
◯	◯	iterierte Trapezregel
◯	◯	ROMBERG-Verfahren

d) Welche der folgenden Aussagen zur qualitativen Fehlerabschätzung (bei Schrittweite h) treffen zu?

ja	nein	
◯	◯	Fehler bei linearer Interpolation ist $O(h^2)$
◯	◯	Fehler der iterierten Trapezregel ist $O(h^2)$
◯	◯	Fehler der Vorwärtsdifferenz zur Bestimmung der 1. Ableitung ist $O(h^2)$
◯	◯	Fehler der iterierten SIMPSON-Regel ist $O(h^4)$
◯	◯	Fehler bei CATMULL-ROM-Interpolation ist $O(h^4)$

Hinweis zur Bewertung: Sie starten mit 8 Punkten und für jede falsch/nicht angekreuzte Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!

3 LU-Zerlegung (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix **A** mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die **LU**-Zerlegung (ohne Pivotisierung) von **A**.

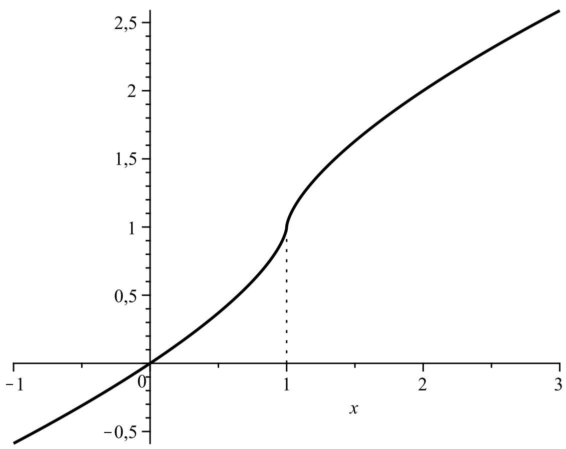
Gegeben sei die Matrix $\mathbf{B}$ sowie deren $\mathbf{LU}$-Zerlegung und ein Vektor $\vec{b}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

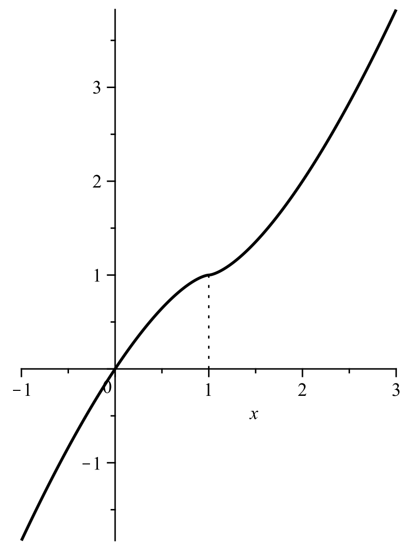
b) Lösen Sie $\mathbf{B}\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der $\mathbf{LU}$-Zerlegung.

4 Kondition (10 Punkte)

a) Betrachten Sie die beiden folgenden Funktionen:



Graph von $f\_1(x) = 1 + \text{signum}(x-1)\,|x-1|^{2/3}$.



Graph von $f\_2(x) = 1 + \text{signum}(x-1)\,|x-1|^{3/2}$.

Entscheiden Sie (durch Blick auf die oben skizzierten Graphen), ob die folgenden Probleme gut oder schlecht konditioniert sind:

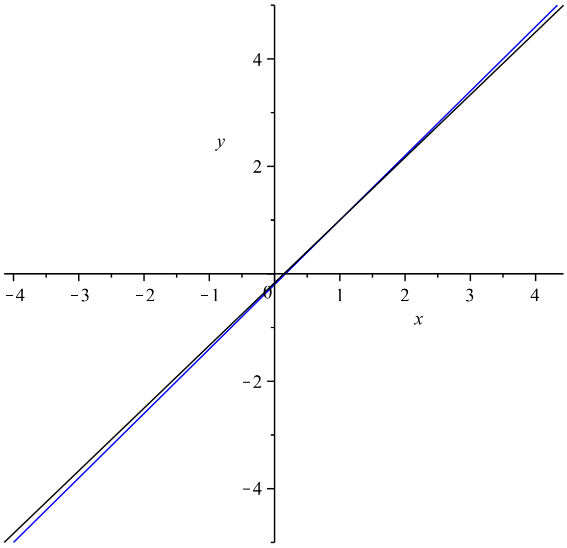
1. Berechnung von $f_1(x)$ für $x \approx 1$

   gut ◯ schlecht ◯

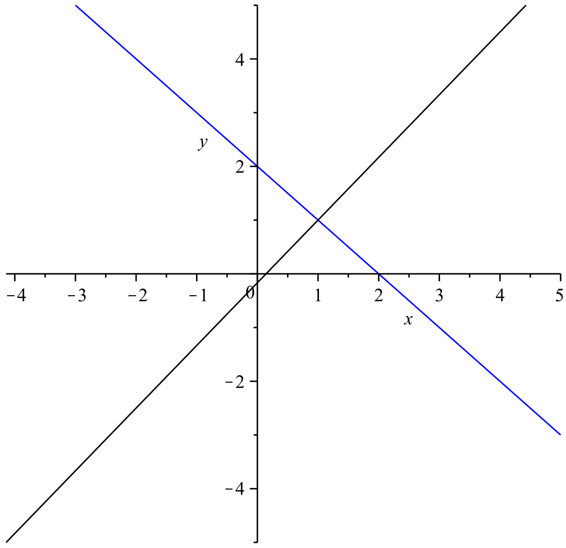
2. Berechnung von $f_2(x)$ für $x \approx 1$

   gut ◯ schlecht ◯

b) Betrachten Sie die folgenden Geradenschnitte:



Die Geraden G und H_1 .



Die Geraden G und H_2 .

Die Geraden sind gegeben durch die Gleichungen:

$$G = \{(x, y) : 7x - 6y = 1\}$$

$$H_1 = \{(x, y) : 6x - 5y = 1\} \qquad H_2 = \{(x, y) : 2x + 2y = 4\}$$

(Der Schnittpunkt ist jeweils $P = (1, 1)$)

Welches dieser beiden Schnittpunktprobleme ist bei Störungen der Koeffizienten der Geradengleichung gut konditioniert, welches ist schlecht konditioniert?

Hinweis: Die Antwort kann durch Blick auf die Abbildungen gegeben werden.

c) $\mathbf{A}_1$ sei die Matrix zur Bestimmung des Schnittpunktes $G \cap H_1$.

Bestimmen Sie die Konditionszahlen dieser 2×2-Matrix bzgl. der Zeilensummennorm $|||\cdot|||_\infty$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ sei eine Diagonalmatrix mit gegebenen λ_i, wobei $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0$.

Bestimmen Sie die Konditionszahl dieser Matrix für eine von Ihnen gewählte Matrix-Norm (bitte angeben welche!).

5 Poissongleichung (8 Punkte)

Die Poisson-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad \text{und} \qquad u = g \quad \text{auf dem Rand von} \quad \Omega$$

soll auf einem L-förmigen Gebiet $\Omega = [0,2]^2 \setminus [1,2]^2$ näherungsweise gelöst werden indem

— das Gebiet Ω durch ein äquidistantes Gitter mit Gitterweite $h = \frac{1}{3}$ diskretisiert wird

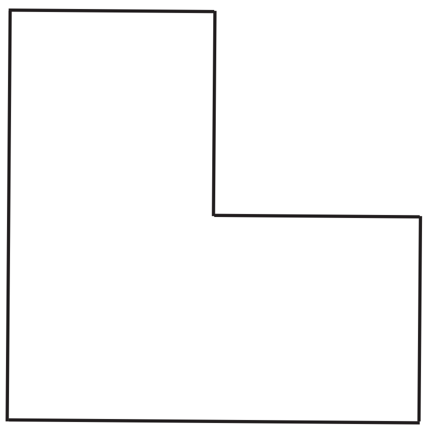
und

— die zweiten Ableitungen in den Knoten durch zentrale Differenzen approximiert werden, d.h,

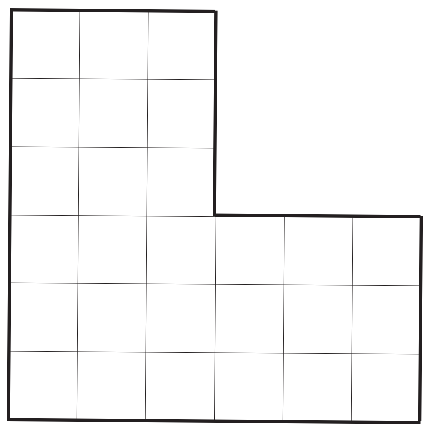
$$u_{xx}(x,y) \approx \frac{u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)}{h^2} \quad \text{bzw.}$$

$$u_{yy}(x,y) \approx \frac{u(x,y-h) - 2u(x,y) + u(x,y+h)}{h^2}$$

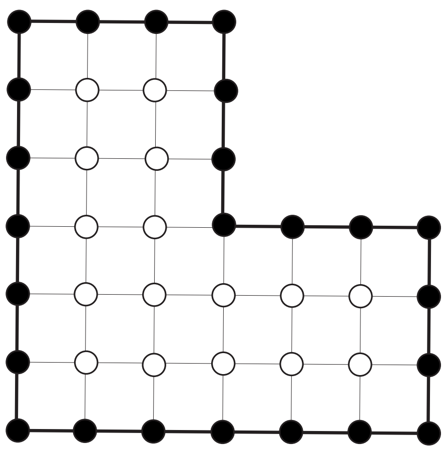
Die unbekannten Funktionswerte in den inneren Knoten werden zu einem Vektor $(u_1, u_2, ..., u_{16})^T$ zusammengefasst. Die Bezeichnungsweise wird in den Abbildungen erläutert.



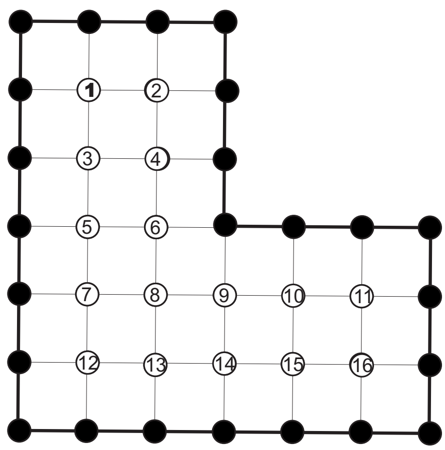
L-förmiges Gebiet $[0,2]^2 \setminus [1,2]^2$



Diskretisiert durch äquidistantes Gitter mit Gitterweite $h = 1/3$

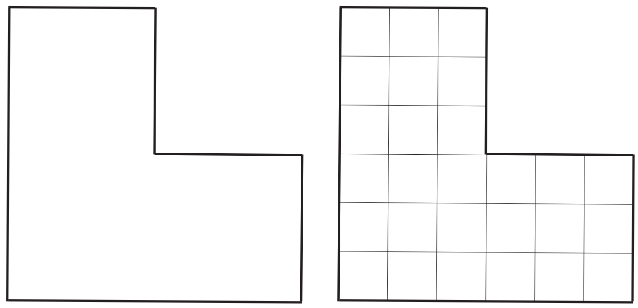


In den äußeren Knoten ● sind die Werte von u gegeben, in den inneren Knoten ○ sind sie unbekannt.



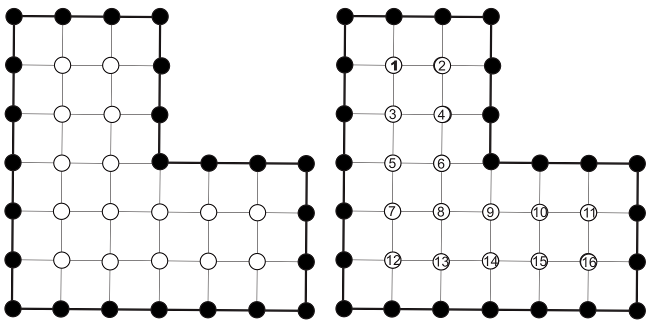
Die Unbekannten werden von links oben beginnend zeilenweise durch nummeriert $u_1, u_2, ..., u_{16}$.

Zur Erinnerung:



L-förmiges Gebiet $[0,2]^2 \setminus [1,2]^2$

Diskretisiert durch äquidistantes Gitter mit Gitterweite $h = 1/3$



In den äußeren Knoten ● sind die Werte von u gegeben, in den inneren Knoten ○ sind sie unbekannt.

Die Unbekannten werden von links oben beginnend zeilenweise durch nummeriert $u_1, u_2, \ldots, u_{16}$.

a) Bestimmen Sie **die ersten 8 Zeilen** der 16×16 Koeffizientenmatrix des zugehörigen Linearen Gleichungssystems. Tragen Sie dazu nur die von Null verschiedenen Koeffizienten in das folgende *Array* ein.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			
1																	u_1		
2																	u_2		*R*
3																	u_3		*e*
4																	u_4		*c*
5																	u_5		*h*
6																	u_6		*t*
7																	u_7		*e*
8																	u_8	=	
9	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_9		
10	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_{10}		*S*
11	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_{11}		*e*
12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_{12}		*i*
13	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_{13}		*t*
14	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_{14}		*e*
15	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_{15}		
16	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	u_{16}		

b) Das Gleichungssystem aus Teil a) kann man iterativ mit dem Jacobi-Verfahren oder dem Gauss-Seidel-Verfahren lösen.

Frage: Was sind die Konvergenzordnungen des Jacobi-Verfahrens und des Gauss-Seidel-Verfahrens?

c) Da die Koeffizientenmatrix von Teil a) definit ist, kann man das Gleichungssystem auch mit dem cg-Verfahren lösen.

Frage: Wieviele Schritte des cg-Verfahrens muss man bei dieser Matrix durchführen, um die exakte Lösung zu erhalten (vorausgesetzt alle Berechnungen sind exakt).

6 Interpolation (7 Punkte)

Gegeben seien folgende Datenpunkte:

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	1	8	64

a) Bestimmen Sie die Funktion $l(x) : [1, 4] \mapsto \mathbb{R}$, welche obige Werte linear interpoliert.

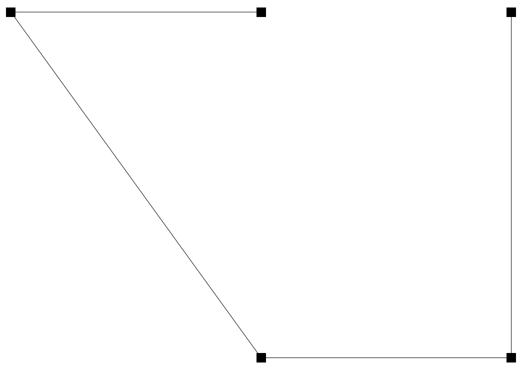
Zur Erinnerung:

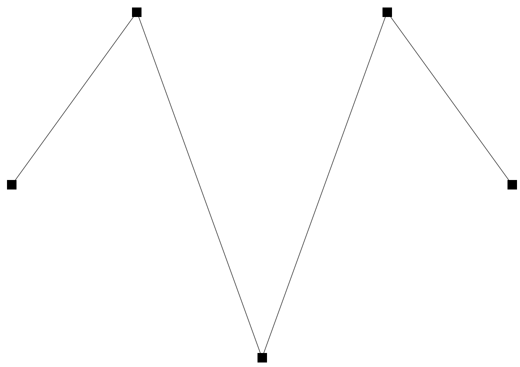
i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	1	8	64

b) Nun sollen Funktionswerte y_i im LEAST-SQUARES-Sinn mit einer Geraden $g(x) = m \cdot x + b$ approximiert werden. Berechnen Sie die Koeffizienten der Geraden und geben Sie die Gerade $g(x)$ an.

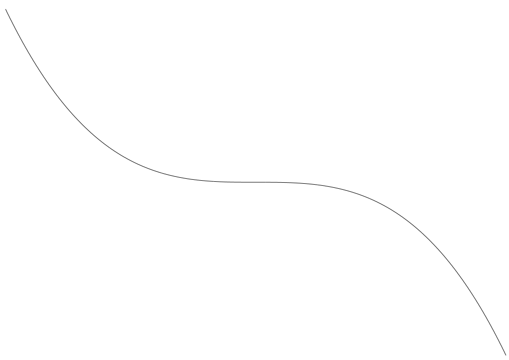
7 Bézier-Kurven (10 Punkte)

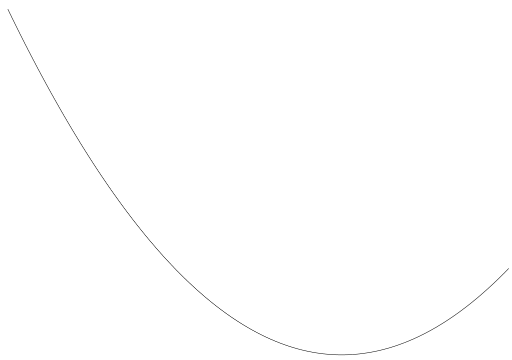
a) Skizzieren Sie zu folgenden Kontrollpolygonen die zugehörigen BÉZIER-Kurven.





b) Skizzieren Sie zu folgenden BÉZIER-Kurven die Kontrollpolygone mit minimalem Grad.





c) Werten Sie mit Hilfe des Algorithmus von DE CASTELJAU die BÉZIER-Kurve, definiert auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Kontrollpunkten

$$\vec{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix},$$

an der Stelle $t_0 = \frac{2}{3}$ aus.

Zur Erinnerung:

$$\vec{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix},$$

d) Die BÉZIER-Kurve von Teil c) soll an der x-Achse gespiegelt werden. Wie lauten die Kontrollpunkte der gespiegelten Kurve?

e) Der Graph der Funktion $f(x) = x^2, x \in [0, 2]$ kann als BÉZIER-Kurve zweiten Grades beschrieben werden. Wie lauten die Kontrollpunkte dieser BÉZIER-Kurve?

8 Dünnbesetzte Matrizen (12 Punkte)

Die Klasse `CRSMatrix` speichert dünn besetzte Matrizen im `Compressed-Row-Storage`-Format. In dieser Aufgabe sollen Sie ausgewählte Methoden dieser Klasse implementieren (verwenden Sie `C++` Syntax). Entgegen der Übung ist **keine** Fehlerbehandlung erforderlich!

```
class CRSMatrix {
    public:
        //! Erstellt eine leere CRS-Matrix (nur 0 Elemente)
        CRSMatrix(unsigned int hoehe, unsigned int breite);

        //! Erstellt eine CRS-Matrix aus einer normalen Matrix
        CRSMatrix(Matrix &other);

        //! Destruktor: Gibt den Speicher frei
        ~CRSMatrix();

        //! Multiplikation mit einer normalen Matrix: Gibt die Ergebnismatrix zurueck
        Matrix operator*(Matrix &other);

    private:
        unsigned int _height;                     //! Hoehe der Matrix
        unsigned int _width;                      //! Breite der Matrix
        unsigned int _nonZeroElements;            //! Anzahl der nicht-0-Elemente in der Matrix

        float* _values;                           //! Wertearray
        unsigned int* _colIndices;                //! Spaltenindexarray
        unsigned int* _rowPtr;                    //! Zeilenpointer
};
```

Die CRS-Matrix verwendet die gegebene Implementierung einer normalen `Matrix` mit folgender Schnittstelle:

```
class Matrix {
    public:
      ...
        float getEntry(unsigned int i, unsigned int j);
        void setEntry(unsigned int i, unsigned int j, float value);
        float& operator()(unsigned int i, unsigned int j);
        unsigned int getHeight();
        unsigned int getWidth();

        unsigned int getNumNonZeroEntries();      //! Liefert die Anzahl der nicht-0 Werte

      ...
};
```

Hinweis: Beachten Sie, dass Indizierungen stets bei 0 beginnen!

Bitte wenden!

a) Implementieren Sie den Konstruktor `CRSMatrix(unsigned int hoehe, unsigned int breite)`, welcher eine leere CRS-Matrix erstellt. Das bedeutet, dass alle Elemente der Matrix 0 sind. Achten Sie darauf, dass der Inhalt der privaten Membervariable dem Zustand des Objektes bzw. der Matrix entspricht.

```
CRSMatrix::CRSMatrix(unsigned int hoehe, unsigned int breite) {





}
```

b) Implementieren Sie den Konstruktor `CRSMatrix(Matrix &other)`, welcher eine CRS-Matrix aus einer normalen Matrix erstellt. Es dürfen natürlich keine 0-Werte gespeichert werden. Achten Sie darauf, dass der Inhalt der privaten Membervariable dem Zustand des Objektes bzw. der Matrix entspricht.

```
CRSMatrix::CRSMatrix(Matrix &other) {

}
```

c) Überladen Sie den Multiplikations-Operator, welcher eine `CRSMatrix` mit einer normalen Matrix multipliziert. Nutzen Sie dabei das CRS-Format effizient aus.

```
Matrix CRSMatrix::operator*(Matrix &other) {
    Matrix result(_height, other.getWidth());









    return result;
}
```

9 Singulärwertzerlegung (11 Punkte)

Gegeben sei die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{8}{15} & -\frac{8}{15} & -\frac{3}{25} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T} .$$

a) Bestimmen Sie für die Matrix $\mathbf{A}$:

- die Singulärwerte

- den Rang

- das Bild

- den Kern

Zur Erinnerung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{8}{15} & -\frac{8}{15} & -\frac{3}{25} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T}.$$

b) Lösen Sie mit der SVD nach $\vec{x}$ auf:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

c) Was bedeutet die Lösung aus b) für das Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$?

10 Iterative Lösungsverfahren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A}$ sowie der Vektor $\vec{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Führen Sie **einen** Schritt des JACOBI-Verfahrens zur Lösung von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ durch. Verwenden Sie als Startvektor $[1, -1, 1]^T$.

b) Geben Sie für die obige Matrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\vec{b}$ die Berechnungsvorschrift zur Bestimmung von $\vec{x}^{k+1} = [x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, x_3^{k+1}]^T$ aus $\vec{x}^k$ an.

$$x_1^{k+1} =$$

$$x_2^{k+1} =$$

$$x_3^{k+1} =$$

Zur Erinnerung:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Führen Sie **einen** Schritt des GAUSS-SEIDEL-Verfahrens zur Lösung von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ durch. Verwenden Sie als Startvektor $[1, -1, 1]^T$.

d) Geben Sie für die obige Matrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\vec{b}$ die Berechnungsvorschrift zur Bestimmung von $\vec{x}^{k+1} = [x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, x_3^{k+1}]^T$ aus $\vec{x}^k$ an.

$x_1^{k+1} =$

$x_2^{k+1} =$

$x_3^{k+1} =$

e) Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren beruhen auf einer Vektoriteration

$$\vec{x}^{k+1} = \mathbf{V}\vec{x}^{k} + \vec{d}$$

Welche Eigenschaften von $\mathbf{V}$ und/oder $\vec{d}$ sind hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens?