Prof. Dr. Günther Greiner
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung
der Universität Erlangen–Nürnberg

16. Februar 2010

Algorithmik kontinuierlicher Systeme — 16. Februar 2010

Angaben zur Person (Bitte in *DRUCKSCHRIFT* ausfüllen!):

Name, Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studienfach: ....

Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen !

Bewertung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max. Punktzahl	4	10	8	10	14	8	10	8	10	8
Erreichte Punkte										

Gesamtpunktzahl	
Note	

Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit.
- Hilfsmittel (außer Schreibmaterial **und** Taschenrechner) sind nicht zugelassen. Andere elektronische Geräte sind auszuschalten.
- Fragen zu den Prüfungsaufgaben werden grundsätzlich nicht beantwortet.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf das jeweilige Aufgabenblatt geschrieben werden. Sollte der Platz nicht reichen, so verwenden Sie die Zusatz-Seiten am Ende der Klausur. Fügen Sie einen Hinweis in Ihre Lösung ein, dass die Lösung auf den Zusatz-Seiten fortgesetzt wurde und beschriften Sie diese mit Namen und Aufgabennummer.
- Es können durch die Aufsicht zusätzlich Seiten eingeheftet werden, sollte mehr Platz benötigt werden. Bitte beschriften Sie den Kopf dieser Seiten mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer. Streichen Sie alles, was nicht bewertet werden soll doppelt aus.
- Auf Ihrem Platz befinden sich einige lose Blätter Schmierpapier. Bei Bedarf können Sie zusätzliches Schmierpapier von der Aufsicht anfordern. Das Schmierpapier muss abgegeben werden, es wird aber nicht bewertet.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung in der Universitätsklinik nachgewiesen werden. Melden Sie sich bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, es sind alle zehn Aufgaben mit 90 Punkten zu bearbeiten.
- Überprüfen Sie die Prüfungsaufgaben auf Vollständigkeit (24 Seiten inklusive Deckblatt) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen und die Erklärungen auf dieser Seite zu unterschreiben.
- Viel Erfolg!

Erklärungen

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 16. Februar 2010 ....

(Unterschrift)

Ich bin damit einverstanden, dass mein Prüfungsergebnis unter Angabe der Matrikelnummer anonymisiert veröffentlicht wird:

ja: ☐ nein: ☐

Erlangen, 16. Februar 2010 ....

(Unterschrift)

1 Komplexität (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Komplexität der folgenden Operationen (unter der Annahme, dass die Länge von Vektoren n und der Größe von Matrizen $n \times n$ ist)!

Matrix-Matrix-Multiplikation (vollbesetzte Matrizen)	**O** ( )
Diskrete Faltung zweier Vektoren (periodischer Fall) $\left(\vec{f} * \vec{g}\right)_i = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{f}_k \cdot \vec{g}_{(i-k) \text{ modulo } n}$ mit $0 \leq i \leq n-1$	**O** ( )
DeCasteljau Algorithmus zum Auswerten von Bézier-Kurven vom Grad n	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ für vollbesetzte symmetrische Matrizen $\mathbf{A}$	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{R}\vec{x} = \vec{b}$ für Dreiecks-Matrizen $\mathbf{R}$	**O** ( )
cg – Verfahren für dünnbesetzte Matrizen	**O** ( )
Bestimmen der Maximums-Norm eines Vektors	**O** ( )
QR-Zerlegung einer vollbesetzten Matrix	**O** ( )

2 Multiple Choice Teil (10 Punkte)

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen halben Punkt!

a) Produzieren die folgenden Operationen bei binärer Fließkommadarstellung **Fehler** (Hinreichender Platz für den Exponenten vorausgesetzt)?

ja	nein	
○	○	$A = B * 8$
○	○	$A = B/8$
○	○	$A = \sin(B)$
○	○	$A = B^2$
○	○	$A = B * 0.01$

b) Gelten folgende Aussagen (gemäß IEEE-Standard)?

ja	nein	
○	○	$(A + B) + C = A + (B + C)$
○	○	A*(B+C)=A*B+A*C
○	○	(1/x) * x = 1
○	○	$(A + B) + (C + D) = (D + C) + (B + A)$
○	○	$x * x \neq 0$ falls $x \neq 0$

c) Welche der folgenden Methoden ist zum Invertieren von Matrizen sinnvoll?

ja	nein	
○	○	LR-Zerlegung
○	○	Newton-Cotes-Regel
○	○	SVD
○	○	Dijkstra-Algorithmus
○	○	Ich versuche das Invertieren von Matrizen wenn möglich zu vermeiden.

d) $||\cdot||$ sei eine Norm im $\mathbb{R}^n$, $|||.|||$ die assoziierte Matrixnorm. Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig?

ja	nein	
○	○	$\|\|\alpha \cdot \mathbf{A}\vec{x}\|\| = \|\alpha\| \cdot \|\|\mathbf{A}\vec{x}\|\|$
○	○	$\|\|\vec{x} + \vec{y}\|\| \leq \|\|\vec{x}\|\| + \|\|\vec{y}\|\|$
○	○	$\|\|\|\mathbf{A}\|\|\| \cdot \|\|\|\mathbf{B}\|\|\| \leq \|\|\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\|\|\|$
○	○	$\|\lambda\| \leq \|\|\|\mathbf{A}\|\|\|$ für jeden Eigenwert λ von $\mathbf{A}$
○	○	$\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \|\|\|\mathbf{A}\|\|\| = 0$

3 Dünnbesetzte Matrizen (8 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie, dass die Indizierung stets bei 1 beginnt!

a) Gegeben sei folgende 4×5-Matrix im **Compressed-Row-Storage** (CRS) Format:

Werte :	1	3	4	2	1	1	3	2
Spalten-Index:	3	5	1	4	5	1	2	3
Zeilen-Zeiger:	1	3	6	6	9			

Geben Sie die entpackte Matrix an!

b) Konvertieren Sie folgende Matrix in das **Compressed-Column-Storage** (CCS) Format:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Werte :								
Zeilen-Index:								
Spalten-Zeiger:								

4 Lineares Ausgleichsproblem (10 Punkte)

Lineare Ausgleichsprobleme sind (bekanntermaßen) von der Form

$$||\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}||_2 = \min \qquad (||\cdot||_2 \text{ bezeichnet die Euklidische Norm}).$$

Dabei ist $\mathbf{A}$ eine gegebene $N \times n$-Matrix vom Rang n $(N > n)$, $\vec{b}$ ein gegebener N-Vektor und $\vec{x}$ der gesuchte n-Vektor.

a) Wie lautet die Normalengleichung des linearen Ausgleichsproblems?

b) Bestimmen Sie die Parameter m und t derjenigen Geraden $y = m \cdot x + t$, welche die folgenden Datenpunkte (x_i, y_i) im quadratischen Mittel am besten approximiert.

x_i	-1	0	2	5
y_i	0	0	1	2

5 2D Interpolation (14 Punkte)

Gegeben ist das Dreieck $\Delta(RST)$ mit $R = (-6, 0)$, $S = (18, 0)$, $T = (12, 24)$. Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes werden mit ρ, σ und τ bezeichnet.

a) Die baryzentrischen Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 sind bekannt:

$$
\begin{array}{lcl}
P_1 & : & \rho_1 = \frac{1}{4}\ , \quad \sigma_1 = \frac{1}{4}\ , \quad \tau_1 = \frac{1}{2}\ ; \\
P_2 & : & \rho_2 = \frac{1}{3}\ , \quad \sigma_2 = \frac{2}{3}\ , \quad \tau_2 = 0\ .
\end{array}
$$

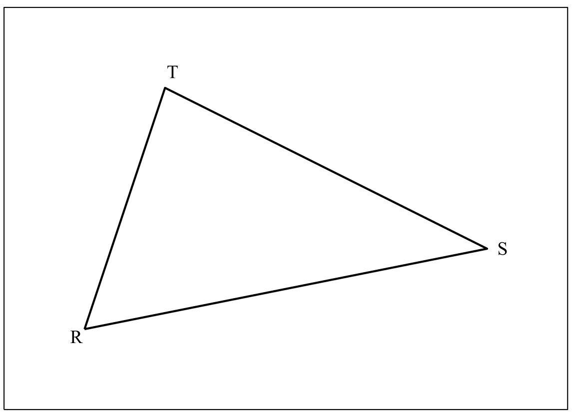
Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der beiden Punkte.

b) In den Ecken des Dreiecks sind die Werte $h_R = 120$, $h_S = 60$ und $h_T = 150$ gegeben. Bestimmen Sie mittels linearer Interpolation die Werte h_1 im Punkt P_1 und h_2 im Punkt P_2.

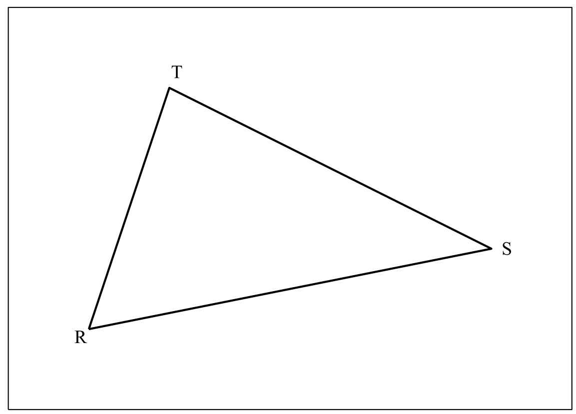
c) Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten des Punktes $P_3 = (8, 8)$.
Zur Erinnerung: $R = (-6, 0)$, $S = (18, 0)$, $T = (12, 24)$.

d) Formulieren Sie (im allgemeinen Fall) eine geometrische Charakterisierung der baryzentrischen Koordinaten.

e) Skizzieren Sie in den nachfolgenden Abbildungen die Lage aller Punkte deren baryzentrischen Koordinaten $\rho = \sigma$ erfüllen bzw. $\rho = 0$.



$\rho = \sigma$



$\rho = 0$

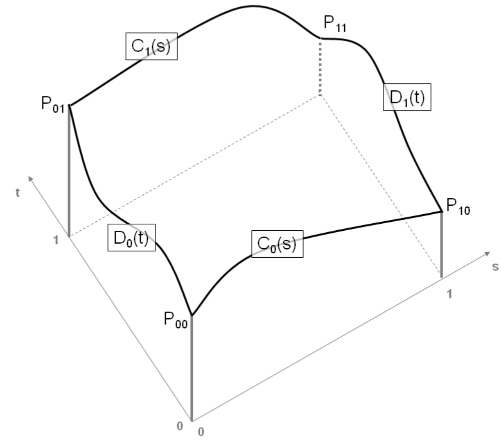
f) Gegeben ist das Quadrat Q mit den vier Eckpunkten: $Q_{00} = (0, 0)$, $Q_{10} = (3, 0)$, $Q_{11} = (3, 3)$ und $Q_{01} = (0, 3)$ sowie Funktionswerte in den Ecken:

$$f_{00} = f(Q_{00}) = 45 \ , \quad f_{10} = f(Q_{10}) = 63 \ , \quad f_{11} = f(Q_{11}) = 27 \ , \quad f_{01} = f(Q_{01}) = 36 \ .$$

Berechnen Sie mittels bilinearer Interpolation die Funktionswerte $f(P_4)$ und $f(P_5)$ an den Stellen $P_4 = (1, 2)$ und $P_5 = (2, 0)$.

6 Coons-Patches (8 Punkte)

Gegeben sind die vier Randkurven



$$C_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad C_0(s) = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad C_1(s) = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ s^2 \end{bmatrix}$$

$$D_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad D_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad D_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

$$P_{00} = C_0(0) = D_0(0), \quad P_{10} = C_0(1) = D_1(0), \quad P_{11} = C_1(1) = D_1(1), \quad P_{01} = C_1(0) = D_0(1)$$

Bestimmen Sie das Coons-Patch

$$F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad F(s,t) = \begin{bmatrix} f_1(s,t) \\ f_2(s,t) \\ f_3(s,t) \end{bmatrix}$$

welches die vier Randkurven interpoliert.

7 Filtern (10 Punkte)

a) Welche der folgenden 2D-Filter sind separierbar?

$$F_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F_3 = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Geben Sie im Falle der Separierbarkeit jeweils auch die beiden 1D-Filter an.

b) Was sind die Vorteile von separierbaren Filtern?

c) Filtern Sie das nachfolgende 5×5 Bild mit der Filtermaske $G = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Dabei sollen die Randpunkte [x] nicht berechnet werden.

12	8	4	8	12
16	12	8	8	12
20	16	12	12	12
16	12	8	8	12
12	8	4	8	12

Input

×	×	×	×	×
×				×
×				×
×				×
×	×	×	×	×

Output

Platz für Zwischenergebnisse

8 Iterative Lösungsverfahren (8 Punkte)

Gegeben seien die Matrix $\mathbf{A}$ sowie der Vektor $\vec{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

a) Führen Sie einen Schritt des JACOBI-Verfahrens zur Lösung von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ durch. Verwenden Sie als Startvektor $\vec{x}_0 = [4, -4, 2]^T$.

b) Führen Sie einen Schritt des GAUSS-SEIDEL-Verfahrens zur Lösung von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ durch. Verwenden Sie als Startvektor $\vec{x}_0 = [4, -4, 2]^T$.

c) Für welche Klassen von Matrizen sind Iterationsverfahren (JACOBI, GAUSS-SEIDEL oder SOR) besonders gut geeignet, um lineare Gleichungen $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ numerisch zu lösen.

9 LR-Zerlegung (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrix $\mathbf{A}$ sowie der Vektor $\vec{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die **LR**-Zerlegung (ohne Pivotisierung) von $\mathbf{A}$.

b) Lösen Sie $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

10 Aitken-Neville (8 Punkte)

Gegeben sei nachstehende Klasse.

```
class NewtonPolynom {
protected:
  //! Ordnung des Polynoms.
  int     n;

  //! Array der Laenge n mit den Stuetztellen.
  float* x;

  //! Array der Laenge n mit den Funktionswerten.
  float* y;

  //! Array der Laenge n mit den Koeffizienten in der Newton-Basis.
  float* a;
public:
  //! Erzeugt ein Polynom p der Ordnung _n fuer das gilt: p(_x[i]) = _y[i].
  NewtonPolynom(const float* _x, const float* _y, const int _n);

  //! Wertet das Polynom an der Stelle x0 aus.
  float operator()(const float x0) const;
};
```

a) Vervollständigen Sie den Konstruktor, der die Koeffizenten `NewtonPolynom::a` des Newton-Polyoms mittels des Algorithmus von Aitken-Neville bestimmt.

```
NewtonPolynom::NewtonPolynom(const float* _x, const float* _y,
                             const int _n) {
  n = _n;
  x = new float[n]; y = new float[n]; a = new float[n];
  for(int i = 0; i < n; i++) {
    x[i] = _x[i];
    y[i] = _y[i];
  }
```

}

b) Implementieren Sie den Klammer-Operator, welcher das Newton-Polynom an der Stelle `x0` auswertet.

```
float NewtonPolynom::operator()( const float x0 ) const
{
  float result;






  return result;
}
```