Prof. Dr. Günther Greiner
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung
der Universität Erlangen–Nürnberg

31. Juli 2009

Algorithmik kontinuierlicher Systeme — 31. Juli 2009

Angaben zur Person (Bitte in *DRUCKSCHRIFT* ausfüllen!):

Name, Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studienfach: ....

Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen !

Bewertung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max. Punktzahl	4	8	6	12	8	14	12	8	8	10
Erreichte Punkte										

Gesamtpunktzahl	
Note	

Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit.
- Hilfsmittel (außer Schreibmaterial **und** Taschenrechner) sind nicht zugelassen. Andere elektronische Geräte sind auszuschalten.
- Fragen zu den Prüfungsaufgaben werden grundsätzlich nicht beantwortet.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf das jeweilige Aufgabenblatt geschrieben werden. Sollte der Platz nicht reichen, so verwenden Sie die Zusatz-Seiten am Ende der Klausur. Fügen Sie einen Hinweis in Ihre Lösung ein, dass die Lösung auf den Zusatz-Seiten fortgesetzt wurde und beschriften Sie diese mit Namen und Aufgabennummer.
- Es können durch die Aufsicht zusätzlich Seiten eingeheftet werden, sollte mehr Platz benötigt werden. Bitte beschriften Sie den Kopf dieser Seiten mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer. Streichen Sie alles, was nicht bewertet werden soll doppelt aus.
- Auf Ihrem Platz befinden sich einige lose Blätter Schmierpapier. Bei Bedarf können Sie zusätzliches Schmierpapier von der Aufsicht anfordern. Das Schmierpapier muss abgegeben werden, es wird aber nicht bewertet.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung in der Universitätsklinik nachgewiesen werden. Melden Sie sich bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, es sind alle zehn Aufgaben mit 90 Punkten zu bearbeiten.
- Überprüfen Sie die Prüfungsaufgaben auf Vollständigkeit (26 Seiten inklusive Deckblatt) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen und die Erklärungen auf dieser Seite zu unterschreiben.
- Viel Erfolg!

Erklärungen

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 31. Juli 2009 ....

(Unterschrift)

Ich bin damit einverstanden, dass mein Prüfungsergebnis unter Angabe der Matrikelnummer anonymisiert veröffentlicht wird:

ja: ☐ nein: ☐

Erlangen, 31. Juli 2009 ....

(Unterschrift)

1 Komplexität (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Komplexität der folgenden Operationen (unter Annahme dass die Länge von Vektoren n und der Größe von Matrizen $n \times n$ ist)!

Matrix-Vektor-Multiplikation (vollbesetzte Matrizen)	**O** ( )
Diskrete Faltung zweier Vektoren (periodischer Fall) $(f * g)(i) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g((i-k) \quad modulo \quad n) \qquad 0 \leq i \leq n-1$	**O** ( )
FFT eines Vektors	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ für tridiagonale Matrizen $\mathbf{A}$	**O** ( )
Lösen von $\mathbf{R}\vec{x} = \vec{b}$ für Dreiecks-Matrizen $\mathbf{R}$	**O** ( )
Ein Iterationsschritt des SOR-Verfahrens (vollbesetzte Matrizen)	**O** ( )
Bestimmen der Maximums-Norm eines Vektors	**O** ( )
Filterung eines $m \times m$ Pixel großen Bildes mit einer (nicht separierbaren) Maske der Größe $n \times n$	**O** ( )

2 Multiple Choice Teil (8 Punkte)

a) Produzieren die folgenden Operationen bei binärer Fließkommadarstellung, mit ausreichendem Speicherplatz für den Exponenten **Fehler**?

ja	nein	
◯	◯	$A = B * 0.125$
◯	◯	$A = B/0.125$
◯	◯	$A = \log_8(B)$
◯	◯	$A = B/256$
◯	◯	$A = \mathrm{pow}(2, B)$
◯	◯	$A = B * 0.1$

b) Gelten folgende Rechengesetze für Fliesskommazahlen (gemäß IEEE-Standard)?

ja	nein	
◯	◯	Assoziativität der Addition
◯	◯	Assoziativität der Multiplikation
◯	◯	Kommutativität der Addition
◯	◯	Kommutativität der Multiplikation
◯	◯	Distributivgesetz

c) Welche der folgenden Verfahren können zum Lösen von linearen Gleichungssystemen verwendet werden?

ja	nein	
◯	◯	GAUSS-SEIDEL-Verfahren
◯	◯	Quicksort
◯	◯	cg-Verfahren
◯	◯	QR-Zerlegung
◯	◯	Romberg-Verfahren

d) $||\cdot||$ sei eine Norm im $\mathbb{R}^n$, $|||.|||$ die assoziierte Matrixnorm. Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig?

ja	nein	
◯	◯	$\|\|\mathbf{A}\vec{x}\|\| = \|\|\|\mathbf{A}\|\|\| \cdot \|\|\vec{x}\|\|$
◯	◯	$\|\|\vec{x} + \vec{y}\|\| \leq \|\|\vec{x}\|\| + \|\|\vec{y}\|\|$
◯	◯	$\|\|\|\mathbf{A}\|\|\| \cdot \|\|\|\mathbf{B}\|\|\| \geq \|\|\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\|\|\|$
◯	◯	$\|\lambda\| \leq \|\|\|\mathbf{A}\|\|\|$ für jeden Eigenwert λ von $\mathbf{A}$
◯	◯	$\|\|\|\mathbf{A}\|\|\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}$

Hinweis: Beachten Sie, dass für jede falsch/nicht angekreuzte Antwort ein halber Punkt abgezogen wird!

3 Filtern (6 Punkte)

Die Filterung eines diskreten Signals f mit der Filtermaske g ist definiert durch die diskrete Faltung:

$$f^{\text{filtered}}[n] = \sum_k f[k]g[n-k].$$

a) Filtern Sie die unendliche Zahlenfolge

$$(\cdots, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, \cdots)$$

mit einem Tiefpassfilter der Größe 3: $[g_{-1}, g_0, g_1] = \frac{1}{3}[1, 1, 1]$

und einem Sobel-Filter: $[g_{-1}, g_0, g_1] = [-1, 0, 1]$

b) Beschreiben Sie mit je einem Stichwort, welche Auswirkungen ein Sobel-Filter und ein Tiefpassfilter auf ein Graustufenbild haben.

c) Welche der folgenden 2D-Filter sind separierbar?

$$F_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad F_2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Geben Sie im Falle der Separierbarkeit jeweils auch die beiden 1D-Filter an.

4 QR-Zerlegung (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie die HOUSEHOLDER-Transformation **S**, die den Vektor $\vec{a} = [4, 2, 5, 2]^T$ auf ein Vielfaches des zweiten Einheitsvektors $\vec{e}_2 = [0, 1, 0, 0]^T$ spiegelt.

b) Bestimmen Sie die **QR**-Zerlegung der Matrix **A** mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3/4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Dies kann mit **einer** Householder-Transformation erreicht werden.

5 Singulärwertzerlegung (8 Punkte)

Gegeben sei die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$:

$$\underbrace{\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 36 & 27 & -20 \\ 30 & -40 & 0 \\ -48 & -36 & -15 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T}.$$

a) Bestimmen Sie für die Matrix $\mathbf{A}$:

- die Singulärwerte

- den Rang

- das Bild

- den Kern

- und die Konditionszahl bzgl. der Euklidischen-Norm $|||\cdot|||_2$.

Zur Erinnerung:

$$\underbrace{\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 36 & 27 & -20 \\ 30 & -40 & 0 \\ -48 & -36 & -15 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T} .$$

b) Bestimmen Sie $\vec{x}$ unter Verwendung der SVD, so dass gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} .$$

Zur Erinnerung:

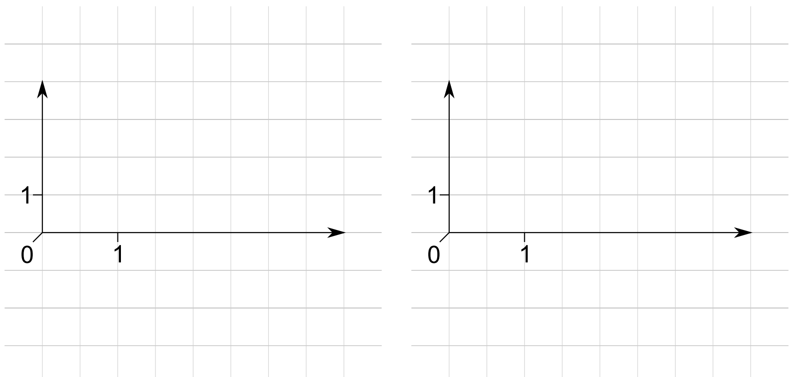
$$\underbrace{\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 36 & 27 & -20 \\ 30 & -40 & 0 \\ -48 & -36 & -15 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{V}^T} .$$

c) Bestimmen Sie die Matrix vom Rang 1, die $\mathbf{A}$ im Sinne der Frobenius-Norm am besten approximiert.

6 Interpolation (14 Punkte)

Gegeben seien folgende Punkte:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	-3	0	5	0



(a) *nearest neighbor* (b) *linear*

a) Bestimmen Sie die Funktion $n(x) : [0, 3] \mapsto \mathbb{R}$, welche obige Werte, gemäß *Nearest Neighbor Interpolation*, stückweise konstant interpoliert **und** zeichnen Sie die Funktion in das obige Schaubild ein!

b) Bestimmen Sie die Funktion $l(x) : [0, 3] \mapsto \mathbb{R}$, welche obige Werte linear interpoliert **und** zeichnen Sie die Funktion!

Zur Erinnerung:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	-3	0	5	0

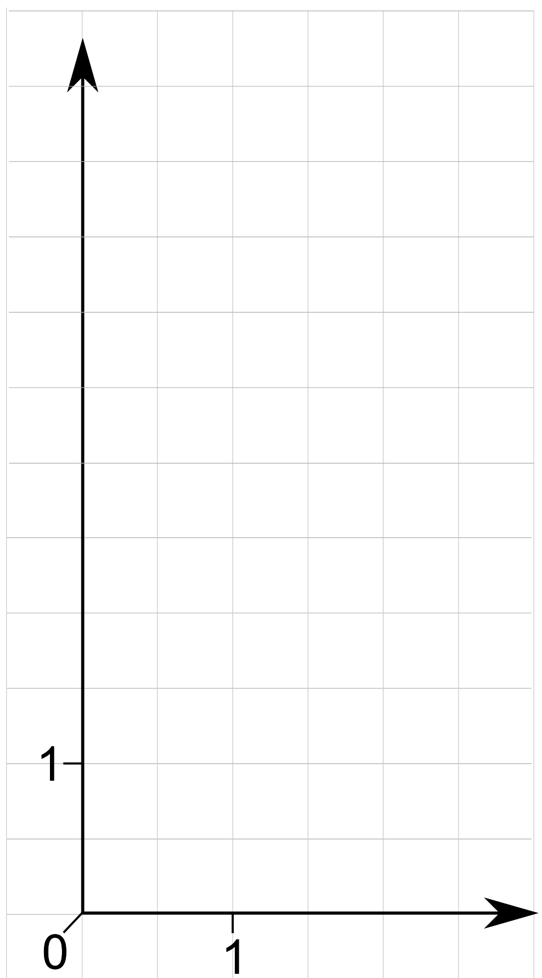
c) Bestimmen Sie das interpolierende Polynom $a(x)$ mit dem Schema von AITKEN-NEVILLE **und** geben Sie $a(x)$ in der NEWTON-Basis an!

Zur Erinnerung:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	-3	0	5	0

d) Geben Sie die Ableitungen m_1 und m_2 für den Catmull-Rom-Interpolanten an den Stellen x_1 und x_2 an.

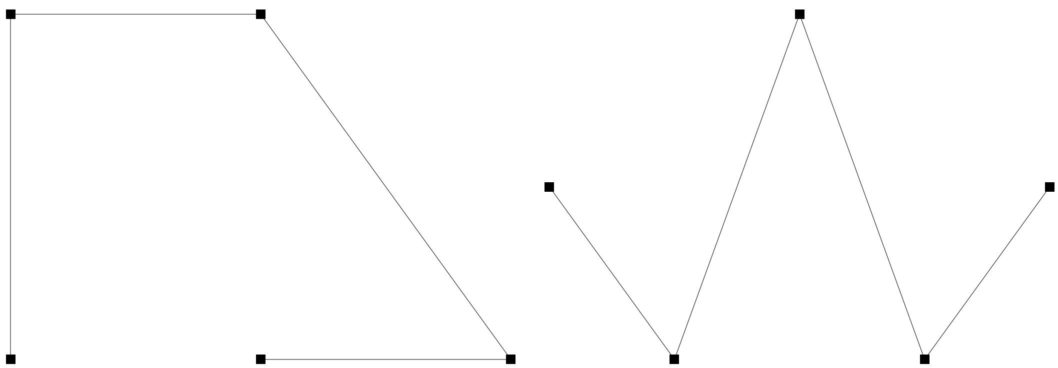
e) Skizzieren Sie im Interval $[x_1, x_2]$ den Catmull-Rom-Interpolanten.



(c) *catmull-rom*

7 Bézier-Kurven (12 Punkte)

a) Skizzieren Sie zu folgenden Kontrollpolygonen die zugehörigen Bézier-Kurven.



b) Skizzieren Sie zu folgenden Bézier-Kurven die Kontrollpolygone mit minimalem Grad.

c) Werten Sie mit Hilfe des Algorithmus von de Casteljau die Bézier-Kurve, definінert auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Kontrollpunkten

$$\vec{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix},$$

an der Stelle $t_0 = \frac{1}{4}$ aus.

d) Geben seien zwei Bézier-Kurven

$$\begin{aligned}
\vec{f}(t) &= B_0^2(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + B_1^2(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + B_2^2(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & t \in [0,1] \\
\vec{g}(t) &= B_0^2(t) \cdot \vec{g}_0 + B_1^2(t) \cdot \vec{g}_1 + B_2^2(t) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Punkte $\vec{g}_0$ und $\vec{g}_1$ so, dass gilt

$$\vec{f}(1) = \vec{g}(0) \quad \text{und} \quad \vec{f}'(1) = \vec{g}'(0)$$

Hinweis: Folgende Formeln mögen Ihnen dabei helfen:

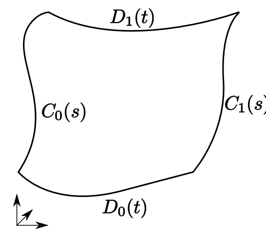
- Ableitung einer Bézier-Kurve:

$$\vec{b}'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\vec{b}_{i+1} - \vec{b}_i) \cdot B_i^{n-1}(t)$$

- Berstein-Polynom:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$$

8 Coons-Patches (8 Punkte)



Gegeben seien die vier Randkurven

$C_0(s) : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad C_1(s) : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad D_0(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad D_1(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

mit

$$C_0(0) = D_0(0), \quad C_0(1) = D_1(0), \quad C_1(1) = D_1(1), \quad D_0(1) = C_1(0)$$

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der das durch die Kurven definierte Coons-Patch an der Stelle (s,t) **auswertet**. Sie können in Ihrem Code davon ausgehen, dass eine Kurve $C(u)$ an der Stelle u wie folgt ausgewertet werden kann:

$$\texttt{vec3}\ \ pt = C(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}$$

Für einen 3D Punkt `vec3` seien alle arithmetischen Operatoren überladen. Beispielsweise würde eine Funktion, die die Mittellinie zweier Kurven auswertet, wie folgt implementiert werden:

```
Kurve C0 = ...;
Kurve C1 = ...;
vec3 curveAverage_You_wont_need_this( double s ) {
  vec3 pt0 = C0(s);
  vec3 pt1 = C1(s);
  vec3 interpol = (pt0+pt1)/2;
  return interpol;
}
```

```
Kurve C0 = ...;
Kurve C1 = ...;
Kurve D0 = ...;
Kurve D1 = ...;

vec3 evalCoonsPatch( double s, double t ) {
```

9 Numerische Integration (8 Punkte)

a) Wie lautet die Trapezregel zur approximativen Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$?

b) Welche Polynome werden durch die Trapezregel exakt integriert?

c) Wie lautet die Simpson-Regel zur approximativen Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$?

d) Welche Polynome werden durch die Simpson-Regel exakt integriert?

e) Berechnen Sie $\int_0^1 64x^3\,dx$ mit der iterierten Trapezregel unter Verwendung der Funktionswerte an den Stellen: $x_k = \frac{k}{4}\ \ (0 \leq k \leq 4)$.

10 Nichtlineare Optimierung (10 Punkte)

Gegeben ist eine quadratische Funktion in $\mathbb{R}^2$

$$Q(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 2y + 10.$$

a) Führen Sie zwei Iterationsschritte des Gradienten-Abstiegsverfahrens zur Bestimmung des Minimums durch. Beginnen Sie mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

   Hinweis: Für ein quadratisches Funktional $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A}\vec{x} + 2\vec{b}^T\vec{x} + \gamma$, eine gegebene Position $\vec{x}$ und eine Suchrichtung $\vec{s}$ ist die optimale Schrittweite

   $$\tau = \frac{\vec{s}^T(\mathbf{A}\vec{x} + b)}{\vec{s}^T \mathbf{A}\vec{s}}.$$

   D.h. das Minimum wird in $\vec{x} - \tau\vec{s}$ erreicht.

Zur Erinnerung:

$$Q(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 2y + 10$$

$$\tau = \frac{\vec{s}^T(\mathbf{A}\vec{x} + b)}{\vec{s}^T\mathbf{A}\vec{s}}.$$

b) Führen Sie nun zwei Iterationsschritte des cg-Verfahrens durch. Beginnen Sie wiederum mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.