Braindump GLoIn WS 18/19

Klausur am 03.04.2019

Aufgabe 1 Aussagenlogische Konsequenz und Beweise

a) Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten:

i) $(A \to C) \wedge (B \to C) \models (A \vee B) \to C$

ii) $((A \wedge B) \to C) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \to C) \models C$

Im negativen Fall reicht es, wenn Sie ein einzelnes Gegenbeispiel angeben.

b) Man betrachte das folgende Beweisskript in Coq: (gleich mit Lösung)

Z.	Coq - Anweisung	Aktuelles Unterziel	Annahme
1	*Require Import* Classical_Prop.		
2			
3	*Parameters* p q r: Prop.		
4			
5	*Theorem* Q1 : (p -> (p -> (p -> q))) -> (p -> q).	(p -> p -> p -> q) -> p -> q	
6	*Proof.*	(p -> p -> p -> q) -> p -> q	
7	intro A.	p -> q	A : p -> p -> p -> q
8	intro B.	q	A : p -> p -> p -> q B : p
9	assert (p -> (p -> q)) as C.	p -> p -> q	A : p -> p -> p -> q B : p
10	apply A;exact B.	q	A : p -> p -> p -> q B : p C : p -> p -> q
11	assert (p -> q) as D.	p -> q	A : p -> p -> p -> q B : p C : p -> p -> q
12	apply C; exact B.	q	A : p -> p -> p -> q B : p C : p -> p -> q D : p -> q
13	apply D.	p	A : p -> p -> p -> q B : p C : p -> p -> q D : p -> q
14	assumption.	*no more subgoals*	-
15	*Qed.*		

Geben Sie für jeden der Schritte 8—14 das primäre Unterziel (also das, das im nachfolgen Schritt bearbeitet wird) / alle Unterziele (?) mit den jeweiligen Annahmen jeweils nach Durchführung des Schritts an. Für Schritte 5 und 7 wären dies beispielsweise (siehe Tabelle)

Aufgabe 2 Formalisierung in Prädikatenlogik

x ist ein Feld

- S(x) $\to$ auf Feld x steht eine schwarze Figur
- W(x) $\to$ auf Feld x steht eine weiße Figur
- D(x) $\to$ auf Feld x steht eine Dame
- T(x)/L(x)/Sp(x)/K(x)/... $\to$ wie Dame, T = Turm; L = Läufer; Sp = Springer; K = König
- G(x,y) $\to$ x und y sind Felder, die in einer vertikalen oder horizontalen Gerade liegen
- B(x,y) $\to$ Figur auf Feld x kann in einem Zug auf Feld y ziehen

Bsp.: weißer König auf x = $W(x) \wedge K(x)$
Bsp.: Feld ist leer = $\neg W(x) \wedge \neg S(x)$

a) Eine weiße Dame wird bedroht.

b) Schwarz bedroht jede Figur, die die schwarze Dame bedroht.

c) Türme können nur horizontal oder vertikal in gerader Richtung ziehen.

d) Jeder Läufer bedroht einen Springer.

Aufgabe 3 Unifikation

Unifikation: Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(x, g(h(x), k(z))) \text{ und } f(h(y), g(z, y))$$

unifizierbar sind und ggf. einen mgu zu berechnen. (Achtung: es ist durchaus von Bedeutung, dass die beiden Seiten gemeinsame Variablen verwenden!). Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe 4 Prädikatenlogische Normalisierung und Resolution

a) Bringen Sie die Formel

$$\forall x((\exists y(P(x, y)) \vee \forall z(Q(x, y))) \rightarrow \exists y(P(x, y) \wedge R(y)))$$

(die Formel selbst, nicht ihre Negation!) in pränexe Normalform, sodann in Skolemform und schließlich in Klauselform. Geben Sie bei den Umformungen ggf. die nötigen Zwischenschritte an.

b) Verwenden Sie das prädikatenlogische Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass die aus den Klauseln

$$\begin{aligned}
&\{S(x, f(x))\}\\
&\{\neg S(x, y), \neg S(y, z), R(x, y)\}\\
&\{\neg P(x), \neg R(x, y), P(y)\}\\
&\{P(a)\}\\
&\{\neg P(f(f(a)))\}
\end{aligned}$$

bestehende Klauselform unerfüllbar ist. In der Klauselform sind x, y, z Variablen und a eine Konstante.

Aufgabe 5 Formale Deduktion in Prädikatenlogik erster Stufe

Folgern Sie mittels natürlicher Deduktion die Formel

$\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow P(y))$

aus den Annahmen

$\forall x \forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))$

$\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow \exists z(S(z, y)))$

Aufgabe 6 Induktion

Sei $\Sigma = \{\text{xor}/2\}$, und sei $\mathfrak{M}$ ein Σ-Modell

$$\mathfrak{M}[\![xor]\!](m, n) = m \oplus n = \begin{cases} \bot & \text{wenn } m = n \\ \top & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei t_η eine Funktion, welche als Ergebnis die Anzahl der $\top$, welche in E ausgewertet unter der Umgebung η vorkommen, zurückgibt.
t_η sei folgendermaßen rekursiv definiert:

$$t_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \eta(x) = \top \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad t_\eta(xor(E, D)) = t_\eta(E) + t_\eta(D)$$

Zeigen Sie durch Induktion über E, dass genau dann $\mathfrak{M}[\![E]\!]_\eta = \bot$ gilt, wenn das Ergebnis von $t_\eta(E)$ gerade ist.

Hinweis: Der eigentliche Induktionsbeweis ist bewusst recht einfach gehalten, es sollte daher insbesondere großer Wert auf eine korrekte formale Schreibweise gelegt werden.