

# Braindump GLoIn WS 16/17

4. April 2017

## 1 Wahrheitstafeln

Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln die folgenden logischen Konsequenzen. Im Falle eines Widerlegs müssen Sie die entsprechende Zeile in der Wahrheitstafel deutlich markieren und argumentieren, warum dies einen Widerleg darstellt.

- a)  $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \neg C) \models \neg A$
- b)  $\neg(A \rightarrow B) \models \neg A \rightarrow B$
- c)  $(\neg A \wedge B) \vee \neg A \models \neg A$
- d)  $(A \rightarrow (B \vee C)) \wedge ((B \wedge A) \rightarrow \neg C) \models A \rightarrow \neg C$

## 2 Formalisierung

Formalisieren Sie Aussagen auf folgender Signatur:

$$\Sigma = \{0/0, 1/0, +/2, */2\}$$

Die Signatur darf nicht erweitert werden! Das Einführen von Abkürzungen ist jedoch erlaubt und ggf. hilfreich (z. B. teilt(x, y)).

- a) x ist ein Teiler von y.
- b) x ist prim. 1 ist per Konvention nicht prim.
- c) Es gibt keine größte Primzahl. (Beachten Sie, dass es in der Signatur kein "größer als Prädikat gibt.)
- d) Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe von zwei Primzahlen.

- e)  $x$  ist eine Primzahlpotenz, d. h.  $x = p^k$  mit  $p$  prim und  $k$  natürlich ( $k = 0$  auch erlaubt). Beachten Sie, dass es in der gegebenen Signatur nicht möglich ist, das Exponieren auszudrücken. Man denke stattdessen kurz über die Eigenschaften der Primfaktorzerlegung einer solchen Primzahlpotenz nach.

### 3 Unifikation

Bestimmen Sie, ob folgende Terme unifizierbar sind und geben Sie im positiven Fall einen MGU an.

$$\{g(f(z), h(z), f(y)) \dot{=} g(f(h(x)), h(y), f(f(x)))\}$$

### 4 Resolution

- a) Bringen sie die folgende Formel zuerst in pränex Normalform, anschließend in Skolemform und schließlich in Klauselform.

$$\forall x (\forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists z (P(x, z) \vee Q(z)))$$

- b) Zeigen Sie per prädikatenlogischer Resolution, dass folgende Klauselmengenerfüllbar ist. Dabei ist  $a$  eine Konstante und  $x, y$  sind Variablen.

$$\begin{aligned} &\{R(x, f(x))\} \\ &\{P(f(x))\} \\ &\{\neg R(x, y), \neg S(x, y), Q(y)\} \\ &\{\neg R(x, y), \neg P(x), S(y, x)\} \\ &\{\neg Q(a)\} \end{aligned}$$

### 5 Natürliches Schließen

Folgern Sie mittels natürlicher Deduktion die Formel

$$\forall x (R(x, x))$$

aus den Annahmen

$$\begin{aligned}\forall x(\exists y(R(x, y))) \\ \forall x\forall y\forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \\ \forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow (R(y, x))).\end{aligned}$$

## 6 Induktion

Sei  $\Sigma = \{and/2, or/2\}$  und sei  $\mathfrak{M}$  ein  $\Sigma$ -Modell mit  $M = \{\top, \perp\}$  und für alle  $x, y \in M$  gelte:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}[\![and]\!](x, y) &= \begin{cases} \top & x = y = \top \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \\ \mathfrak{M}[\![or]\!](x, y) &= \begin{cases} \perp & x = y = \perp \\ \top & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Seien  $\eta_1$  und  $\eta_2$  Umgebungen, sodass wenn für eine Variable  $v \in V$  gilt  $\eta_1(v) = \top$ , dann auch  $\eta_2(v) = \top$ . Zeigen Sie durch Induktion über Terme  $E$ , dass wenn  $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta_1 = \top$ , dann auch  $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta_2 = \top$ . (Alle Schritte müssen selbstverständlich vollständig ausgeführt werden.)