Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1 - Aufwärmfragen [6 Punkte | 2 + 2 + 2]

Zeigen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (die jeweiligen Beweise sind äußerst kurz):

a) Es gibt L_1 und L_2 mit: L_1 und L_2 sind kontextfrei und $L_1 \cap L_2$ ist unentscheidbar.

b) Sei H das allgemeine Halteproblem und SAT das Erfüllbarkeitsproblem. Es gilt: $H \leq SAT$.

c) Es gibt reguläre Sprachen L, so daß es $L^{'}$, $L^{'} \subset L$ gibt, mit: $L^{'}$ ist unentscheidbar.

Schreiben Sie zuerst zur Aussage "Stimmt" oder "Stimmt nicht" und dann Ihre Begründung. Ohne ernsthafte Begründung keine Punkte!

2 Aufgabe 2 - Halteproblem [8 Punkte | 2 + 6]

a) Definieren Sie das Halteproblem H so, wie es in der Vorlesung vorgestellt worden ist.

b) Beweisen Sie mittels Reduktion, daß die Sprache

$$L_{2b} = \{< M >_{\#z} \mid z \in 0,1^*, \text{ M ist eine deterministische 1-Band-Turingmaschine.}$$
$$\text{Sei n die durch z binär dargestellte natürliche Zahl.}$$
$$\text{M gestartet mit z gibt als Ausgabe die Binärdarstellung von } n^2 \text{ aus}\}$$

nicht entscheidbar ist. Benutzen Sie, daß H nicht entscheidbar ist.

Hinweise: Nicht vergessen: "$\Leftrightarrow$" besteht aus "$\Rightarrow$" und aus "$\Leftarrow$".

3 Aufgabe 3 - Kontextfreie Pumpeigenschaft [9 Punkte | 2 + 4 + 3]

a) Definieren Sie die kontextfreie Pump-Eigenschaft für eine Sprache L über dem Alphabet Σ.

b) Zeigen Sie direkt durch Anwendung der Definition der kontextfreien Pump-Eigenschaft, daß die Sprache

$$L_{3b} = \{0^k 1^l \mid k, l \in \mathbb{N},\ k > l > 2\}$$

die kontextfreie Pump-Eigenschaft besitzt.

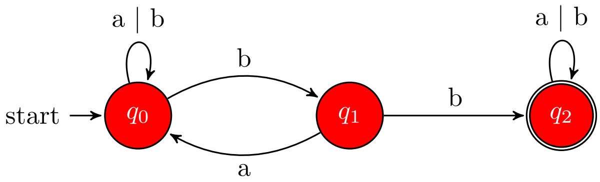
c) Zeigen Sie direkt durch Anwendung der Definition der kontextfreien Pump-Eigenschaft, daß die Sprache

$$L_{3c} = \{0^k 1^l ☺^m \mid k, l, m \in \mathbb{N},\ k > l > m > 0\}$$

die kontextfreie Pump-Eigenschaft <u>nicht</u> besitzt.

4 Aufgabe 4 - Automaten [9 Punkte | 1 + 4 + 4]

Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat A_1 mit $\Sigma = \{a, b\}$:



a) Welche Sprache L_1 akzeptiert der Automat A_1?

b) Konstruieren Sie mit dem Verfahren der Vorlesung (es muß erkennbar sein!) einen zu A_1 äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

Zeichnen Sie nur die vom Startzustand aus erreichbaren Zustände.

c) Sei $L = \{0^k 1^l \mid k, l \in \mathbb{N},\ 0 < k < l\}$. Jemand behauptet, einen deterministischen endlichen Automaten A mit $L = L(A)$ konstruiert zu haben. A soll n Zustände besitzen.

Geben Sie in Abhängigkeit von n ein Wort $z \in L$ an mit folgender Eigenschaft: Aus einer akzeptierenden Rechnung von A für z können Sie Wörter $\hat{z}$ konstruieren mit:

- A akzeptiert $\hat{z}$
- $\hat{z} \in L$

Zeigen Sie, daß z die genannte Eigenschaft besitzt.

5 Aufgabe 5 - Primitive und μ-rekursive Funktionen [6 Punkte | 2 + 1 + 2 + 1]

a) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (k+1)-stellige Funktion. Wir schreiben $f(y_1, \ldots, y_{k+1})$.

Definieren Sie gemäß der Vorlesung, wie aus f durch Anwendung des μ-Operators die k-stellige Funktion $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, geschrieben als $g(x_1, \ldots, x_k)$, entsteht (man schreibt auch $g = \mu f$).

b) Sei $f(x, y) = (9 - 3 \cdot x) \cdot (y + 1)$ mit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Bestimmen Sie $g = \mu f$.

Hinweis: Achten Sie auf die Stelligkeit von g.

c) Sei $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine k-stellige Funktion und sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (k+1)-stellige Funktion.

Definieren Sie die Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, die gemäß der Vorlesung durch primitive Rekursion aus g und h entsteht.

d) Bezeichne $null(x)$ die 1-stellige Funktion, die die Konstante 0 ausgibt, und bezeichne $add(x, y)$ die 2-stellige Funktion, die die Summe von x und y berechnet. $mult(x, y)$ soll die 2-stellige Funktion sein, die als Wert das Produkt von x und y annimmt.

Zeigen Sie, daß $mult(x, y)$ durch primitive Rekursion aus $null(x)$ und $add(x, y)$ entstehen kann.

Hinweis: $null(x)$ sollte in Ihrer Lösung vorkommen!

6 Aufgabe 6 - P=NP?! [7 Punkte | 2 + 3 + 2]

a) Definieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte Knotenüberdeckungsproblem (Vertex Cover) VC (das Wort "Knotenüberdeckung" müssen Sie definieren, wenn Sie es in Ihrer Problemdefinition benutzen wollen).

b) Aus der Vorlesung kennen Sie das folgende Problem:

$CLIQUE := \{< G, k > \mid k \in \mathbb{N}$, G ist ein Graph, der einen vollständigen Teilgraphen der Größe k enthält$\}$.

$\#bin(a)$ bezeichne die Binärdarstellung der natürlichen Zahl a. Sei

$$ENDERIESIG := \{bin(a_1)\# \ldots \#bin(a_n) \mid n \geq 2,\ a_n > \sum_{i=1}^{n-1} a_i\}.$$

Zeigen Sie $ENDERIESIG \leq_p CLIQUE$.

Hinweis: Vergessen Sie nicht, die Laufzeit der Berechnung der Reduktionsfunktion zu begründen.

c) Angenommen, $P = NP$.

Zeigen Sie, daß $ENDERIESIG$ dann NP-vollständig ist, indem Sie zeigen:

$$CLIQUE \leq_p ENDERIESIG.$$

Begründen Sie insbesondere durch Hinweis auf die Definition des Begriffs, warum $ENDERIESIG$ damit NP-vollständig ist.