1. Aufgabe

Frage	+	-
Alle Sprachen in NP sind entscheidbar.	☒	☐
Sind zwei Sprachen L_1 und L_2 unentscheidbar, dann ist die symmetrische Differenz $L_1 \Delta L_2 := (L_1 \cup L_2) - (L_1 \cap L_2)$ auch unentscheidbar.	☐	☒
Die Sprache $L = \{\langle M \rangle \mid M$ hält mindestens für die Eingaben w_1 und $w_2, w_1, w_2 \in \Sigma^*, w_1 \neq w_2\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.	☐	☒
Wenn L regulär ist, besitzt L die kontextfreie Pumpeigenschaft.	☒	☐
Der Schnitt zweier kontextfreier Sprachen ist entscheidbar.	☒	☐
$L = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle = w, M$ hat maximal $\log_2 \lvert w \rvert$ Zustände$\}$ ist entscheidbar.	☒	☐
$L = \{\langle G, w \rangle \mid G$ ist Grammatik in Chomsky NF und $w \in L(G)\}$, dann ist: $L \leq_p$ SAT	☒	☐
Sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben und es sei $V' \subseteq V$ gegeben. Dann gibt es keine deterministiche 1-Band-Turingmaschine, die in polynomieller Zeit entscheidet, ob V' eine unabhängige Menge in G bilden.	☐	☒
Gegeben seien zwei Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$. Wenn es eine total berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ gibt, dann gilt: $A \leq B$	☒	☐
Sei x die Binärdarstellung der natürlichen Zahl $(x)_2$, $f(x) = (x)_2$, $f : \{0,1\}^+ \to \mathbb{N}$. Ist f bijektiv?	☐	☒

2. Aufgabe

a)
Definieren Sie das initiale Halteproblem:
$H_\varepsilon := \{\langle M \rangle \mid M$ ist det. 1-Band-TM, die, gestartet mit leerem Band, hält$\}$

b)
$L_{2B} = \{\langle M \rangle \mid M$ berechnet $\mathrm{bin}((x)_2^2)\}$, dabei ist $\mathrm{bin}(x)$ die Binärdarstellung von x und $(x)_2$ wie oben definiert. Zeigen Sie: L ist nicht entscheidbar
Hinweis: Reduzieren Sie das unentscheidbare H_ε auf L_{2B}. Zum Beweis „$\Leftrightarrow$“ gehört „$\Rightarrow$“ und „$\Leftarrow$“.

3. Aufgabe

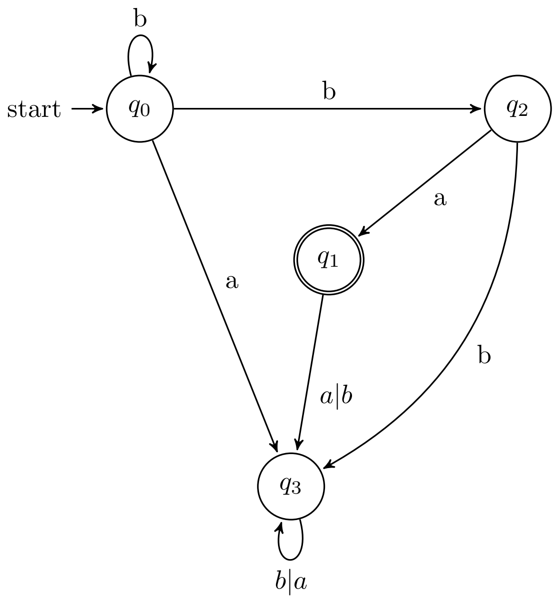
a)
Definieren Sie die kontextfreie Pumpeigenschaft:
$\exists p \in \mathbb{N} : \forall z \in L, |z| \geq p : \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*, uvwxy = z : (|vwx| \leq p) \wedge (|vx| \geq 1) \wedge \big(\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^iwx^iy \in L\big)$

b)
Gegeben sei die Sprache:
$L_{3C} = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$
Zeigen Sie durch direkte Anwendung der Definition, dass L_{3C} die kontextfreie Pumpeigenschaft besitzt.

c)
Gegeben sei die Sprache:
$L_{3C} = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 0\}$
Zeigen Sie durch direkte Anwendung der Definition, dass L_{3C} die kontextfreie Pumpeigenschaft nicht besitzt.

4. Aufgabe

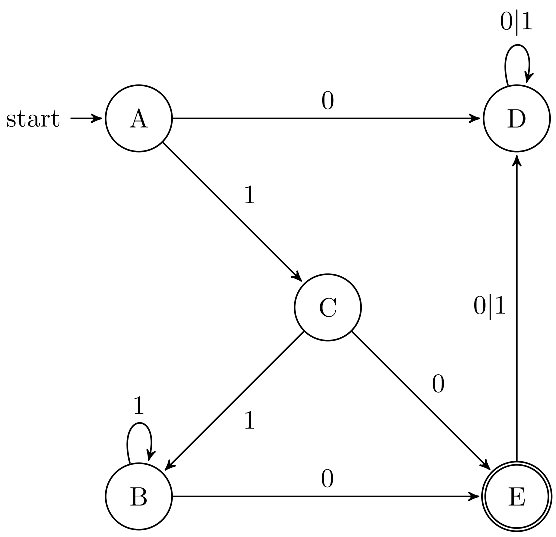
a) Gegeben sei der folgende Automat A_1:



Welche Sprache beschreibt der Automat A_1?
$L(A_1) = L(b^*ba)$

b) Wandeln Sie den NFA A_1 in einen DFA um:

c) Minimieren Sie den Automaten A_2 unter Beibehaltung der Eigenschaft, dass es für jedes Zeichen einen Übergang gibt:

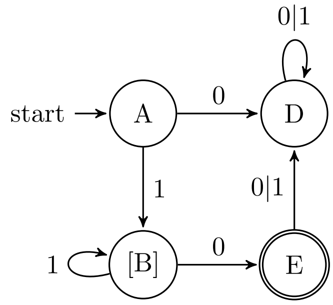


Lösung via NEQ:

B	1			
C	1	ä		
D	2	1	1	
E	0	0	0	0
	A	B	C	D

(Hinweis: Nummern nicht verpflichtend)
$\Rightarrow B \equiv C$

Das ergibt dann:



5. Aufgabe

a)
Gegeben sei die Grammatik: $G = (V, \Sigma, P, S)$. Geben Sie die rekursive Definition der $V(i,j) := \{A \mid A \xrightarrow{*} a_i \dots a_j\}$ $(i \leq j)$, die der CYK-Algorithmus verwendet, an:

$V(i,i) \quad = \{A \mid (A \rightarrow a_i) \in P\}$
$V(i,j) \quad = \{A \mid (A \rightarrow BC) \in P, B \in V(i,k), C \in V(k+1,j), k \in \{i, \dots, j-1\}\}$

b) Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ und $w = ababa$. Die Produktionen von G lauten:

$$S \rightarrow AB|BC \qquad A \rightarrow BA|a$$
$$B \rightarrow CC|b \qquad C \rightarrow AB|a$$

Vervollständigen Sie folgende Tabelle! Woran erkennen Sie, dass $w \in L(G)$?

a	b	a	b	a
{A,C}	{B}	{A,C}	{B}	{A,C}
{S,C}	{S,A}	{S,C}	{S,A}	
{B}	{S,C}	{B}		
$V(1,4)$	$V(2,5)$			
$V(1,5)$				

$V(1,4) = \{B\}$
$V(1,5) = \{S, A, C\}$
$V(2,5) = \{B\}$
$w \in L(G)$, da $S \in V(1, |w|) = V(1,5)$

6. Aufgabe

a) Geben Sie die Definition des Überdeckungsproblems an:
$VC = \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist Graph (V,E) und $\exists V' \subseteq V : |V| = k, \forall (u,v) \in E : u \in V' \vee v \in V'\}$

b) Gegeben sei folgende Sprache:

$$\textsc{MonotonSteigend} = \{\text{bin}(a_1)\#\dots\#\text{bin}(a_n) \mid \forall i \in \{1 \dots n\} : a_i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1 \dots n-1\} : a_j \leq a_{j+1}\}$$

Zeigen Sie mittels Reduktion: $\textsc{MonotonSteigend} \leq_p \textsc{Clique}$ Hinweis: Zum Beweis „⇔“ gehört „⇒“ und „⇐“. Denken Sie daran, die Laufzeit Ihrer Reduktionsfunktion anzugeben.

c) Nehmen Sie an, es sei $P = NP$. Ist dann $\textsc{MonotonSteigend}$ NP-Vollständig?