KLAUSUR Mathematik für Ingenieure C4, Bachelor

Prof. Dr. W. Merz **Info**
Erlangen, 29. Juli 2021 **Dauer: 90 Min.**

A1) Entscheiden Sie durch Rechnung, welche der nachfolgenden Zufallsereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

a) Beim Werfen eines Würfels:
A: Die Augenzahl ist eine Primzahl.
B: Die Augenzahl ist gerade.

b) Beim Drehen eines Glücksrades mit Radius 1:
A: Der Punkt liegt in $(0, \pi/2)$.
B: Der Punkt liegt in $(\pi/4, 5\pi/4)$.

c) Beim Werfen zweier Würfel:
A: Die Augensumme ist gerade.
B: Beim zweiten Wurf erscheint eine ungerade Zahl.

(2+3+3=8 Punkte)

Lösungsvorschlag.

a) Es gilt
$$A = \{2, 3, 5\}, \ \ B = \{2, 4, 6\}, \ \ A \cap B = \{2\},$$
also
$$|A| = 3, \ \ |B| = 3, \ \ |A \cap B| = 1.$$
Damit folgt
$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6} = P(A \cap B).$$
Also sind A und B nicht stochastisch unabhängig.

b) Die Länge der Intervalle sind
$$|A| = \frac{\pi}{2}, \ \ |B| = \pi, \ \ |A \cap B| = \frac{\pi}{4}.$$
Damit folgt
$$P(A) \cdot P(B) = \frac{\pi/2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{8} = P(A \cap B).$$
Also sind A und B stochastisch unabhängig.

c) Die Anzahl der Elemente in den Mengen sind

$$|A| = 18, \;\; |B| = 18, \;\; |A \cap B| = 9.$$

Damit folgt

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{9}{36} = P(A \cap B).$$

Also sind A und B stochastisch unabhängig.

A2) Existieren Konstanten $c \in \mathbb{R}$ derart, dass nachfolgende Funktionen Dichten sind?

a) $f(x) = \begin{cases} 1 + cx & : \quad 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & : \quad \text{sonst}, \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} cx^2 y & : \quad 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & : \quad \text{sonst}. \end{cases}$

(3+5=8 Punkte)

Lösungsvorschlag.

a) Es existiert kein $c \in \mathbb{R}$, so dass f eine Dichte ist. Denn

$$\int\limits_0^3 (1 + cx)\, dx = 3 + \frac{9}{2} c \overset{!}{=} 1 \iff c = -\frac{4}{9},$$

aber die resultierende Funktion $f(x) = 1 - \frac{4}{9} x$ nimmt für $\frac{9}{4} \leq x \leq 3$ negative Werte an.

b) Es existiert genau ein $c \in \mathbb{R}$, so dass f eine Dichte ist. Es gilt

$$c \int_0^1 \int_0^1 x^2 y \, dx dy = c \int_0^1 x^2 \, dx \int_0^1 y \, dy = c \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \overset{!}{=} 1 \iff c = 6.$$

Also gilt

$$f(x, y) = 6x^2 y \geq 0 \ \text{ für } \ x, y \geq 0.$$

A3) Seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen, beide mit dem selben Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe des **Transformationssatzes** die Dichte der Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1^2, \\ Y_2 &= X_1 + X_2. \end{aligned}$$

(8 Punkte)

Lösungsvorschlag. Wir benutzen wie verlangt den Transformationssatz. Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von $X = (X_1, X_2)$ gegeben durch

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda x_2} & : \ x_1, x_2 > 0, \\ 0 & : \ x_1, x_2 \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$.

Die Abbildung $G : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$ ist gegeben durch

$$G(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Der Definitionsbereich von G lautet

$$M = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x_1, x_2) > 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1, x_2 > 0 \right\}.$$

Die Umkehrabbildung von G lautet

$$G^*(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{y_1} \\ y_2 - \sqrt{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$M^* = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y_1 > 0, \ y_2 > \sqrt{y_1} \right\}.$$

Der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix J_G lautet

$$|\det(J_G(\vec{x}))| = \left| \det \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = |2x_1| = 2x_1.$$

Damit ist also

$$|\det(J_G(G^*(\vec{y})))| = 2\sqrt{y_1}.$$

Daraus resultiert

$$\begin{aligned} f_Y(y_1, y_2) &= f_X(G^*(\vec{y})) \cdot |\det(J_G(G^*(\vec{y})))|^{-1} = f_X\left(\sqrt{y_1}, \ y_2 - \sqrt{y_1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y_1}} \\ &= \frac{\lambda^2}{2\sqrt{y_1}} \, e^{-\lambda\left(\sqrt{y_1} + y_2 - \sqrt{y_1}\right)} = \underbrace{\frac{\lambda}{2\sqrt{y_1}}}_{=:f_1(y_1)} \underbrace{\lambda e^{-\lambda y_2}}_{=:f_2(y_2)}. \end{aligned}$$

A4) Eine Tüte enthält 200 Reißnägel, welche auf einen Tisch gestreut werden. Bei 120 Reißnägeln berührt die Spitze den Tisch und bei 80 zeigt die Spitze senkrecht nach oben. Wir definieren die Zufallsvariable X, die die beiden Werte $P(X = 1) = p$ (Spitze nach unten) und $P(X = 0) = 1 - p$ (Spitze nach oben) annimmt. Bestimmen Sie mit der Maximum-Likelihood Methode durch die Wahl einer geeigneten Verteilung von X die Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

(8 Punkte)

Lösungsvorschlag. Die Zufallsvariable ist binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Die konkrete Likelihood-Funktion lautet

$$L(p) = P(X=1)^{120} P(X=0)^{80} = p^{120}(1-p)^{80}.$$

Um das anschließende Differenzieren zu erleichtern, Logarithmieren wir die Funktion und erhalten

$$\ln L(p) = 120 \ln p + 80 \ln(1-p).$$

Alternativ wäre auch

$$L(p) = \binom{200}{120} p^{120}(1-p)^{80} \iff \ln L(p) = \ln \binom{200}{120} + 120 \ln p + 80 \ln(1-p)$$

als Likelihood-Funktion möglich. In beiden Fällen – welche sich lediglich durch eine Konstante unterscheiden – resultiert

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{120}{p} - \frac{80}{1-p} \stackrel{!}{=} 0 \iff 120(1-p) - 80p = 0.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\hat{p} = \frac{120}{200} = 0,6.$$