Diplom-Vorprüfung Herbst 2002

Klausur im Prüfungsfach

EINFÜHRUNG IN DIE THEORETISCHE INFORMATIK

19.09.2002

Prüfer: Prof. Dr. Klaus Leeb, Prof. Dr. Horst Müller, Prof. Dr. Volker Strehl

GeTEXte Version des Originals

nach bestem Wissen und Gewissen vom Arnie
und völlig ohne Gewähr

Name, Vorname, Geburtsdatum:

...

...

Studienfach, Matrikelnummer:

...

Gesamtzahl der gehefteten Blätter: 16

Gesamtzahl der abgegebenen Blätter:

Nicht von der geprüften Person auszufüllen!

Erreichbare Punktzahl:	90
Erreichte Punktzahl:	
Note:	

Organisatorische Hinweise

BITTE SORGFÄLTIG DURCHLESEN UND KENNTNISNAHME DURCH UNTERSCHRIFT (S.U.) BESTÄTIGEN!

1. Bitte legen Sie Studentenausweis, Lichtbildausweis und Zulassungsbescheid bereit.

2. Als Hilfsmittel sind nur Schreibmaterialien zugelassen.

3. Schmierpapier wird nicht abgegeben und nicht korrigiert.

4. Sie können bei der Aufsicht zusätzliche Bearbeitungsblätter anfordern. Diese müssen Ihrer Arbeit angeheftet und bei der Geasmtzahl der abgegebenen Blätter mitgezählt werden.

5. Unleserliches wird nicht bewertet.

ERKLÄRUNG

1. Im Falle einer während der Prüfung auftretenden Prüfungsunfähigkeit zeige ich dies sofort der Aufsicht an und befolge deren Anweisungen. Ich weiß, daß ich die volle Beweislast trage. Ich lasse mir das Formular des Prüfungsamtes, das für diese Fälle vorgesehen ist, aushändigen und verfahre nach den dort niedergelegten Richtlinien.

2. Ich weiß, daß im Falle des Täuschungsversuchs oder der Benutzung unerlaubter Hilfsmittel („Unterschleif") der Prüfungsausschuss die Entscheidung treffen kann, die betroffene Prüfungsleistung als mit „nicht ausreichend" bewertet gelten zu lassen.

3. Ich habe die obigen organisatorischen Hinweise zur Kenntnis genommen.

Erlangen, den 19.09.2002 ....

(Unterschrift)

EINWILLIGUNG

(nur bei Zustimmung zu Unterschreiben)

Ich bin damit einverstanden, daß mein vorläufiges Ergebnis anonymisiert, jedoch unter Angabe der Matrikelnummer, am schwarzen Brett des Lehrstuhl Informatik 1 veröffentlicht wird. Die Bekanntgabe des vorläufigen Ergebnisses begründet keinen Rechtsanspruch. Die Bekanntgabe des endgültigen Ergebnisses erfolgt ausschließlich durch das Prüfungsamt.

Erlangen, den 19.09.2002 ....

(Unterschrift)

Aufgabe I-1. Gegeben sind die beiden regulären Ausdrücke

$\alpha = \mathrm{ab}(a^2 b)^*$ und $\beta = (\mathrm{aba})^*\mathrm{ab}$

über dem Zeichenvorrat {a,b,c}.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Ausdrücke, also $\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}(\beta)$.

b) (2 Punkte) Geben Sie eine $\mathrm{L}(\alpha)$ erzeugende Grammatik an.

c) (2 Punkte) Konstruieren Sie einen deterministischen erkennenden Automaten, der $\mathrm{L}(\alpha)$ akzeptiert.

Aufgabe I-2. Seien L_1, L_2 Sprachen über Σ. Zeigen Sie

a) (3 Punkte) Sind L_1 und L_2 entscheidbar, so ist auch L_1 - L_2 entscheidbar.

b) (2 Punkte) Sind L_1 und L_2 regulär, so ist auch L_1 - L_2 regulär.

Aufgabe I-3. Sei L $= \{w \in \{a,b\}^* |\ l(w)$ ist die dritte Potenz einer natürlichen Zahl n$\}$.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie mit dem Punp-Lemma für reguläre Sprachen, daß L nicht regulär ist.

b) (6 Punkte) Zeigen Sie, daß L nicht regulär ist, indem Sie nachweisen, daß der Index der zu L gehörigen Nerode-Äquivalenzrelation unendlich ist.

Aufgabe I-4. Sei die Funktion $f = < n \rightarrow 2 * n + 3 >$ betrachtet.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, daß f primitiv-rekursiv ist.

b) (3 Punkte) Ist die Menge $\{w \in \{0,1\}^* | M_w \text{ berechnet } f\}$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Aussage.

II, Leeb (Für Antworten ist Platz in eckigen Klammern vorgesehen, Zutreffendes bitte unterstreichen, und auch Nichtzutreffendes bitte schräg durchstreichen!)

Aufgabe II-1, über die Kombinatorik von Schaltungen: Co- und Contravarianz von Funktoren, Einsatz des Zählens modulo 2 und von Ungleichungen am unteren und oberen Bereichsrand (Empfehlung des Prüfers: Diese Aufgabe ist ziemlich technisch und bringt nur 3 Punkte. Holen Sie sich zuerst die anderen aus II!)

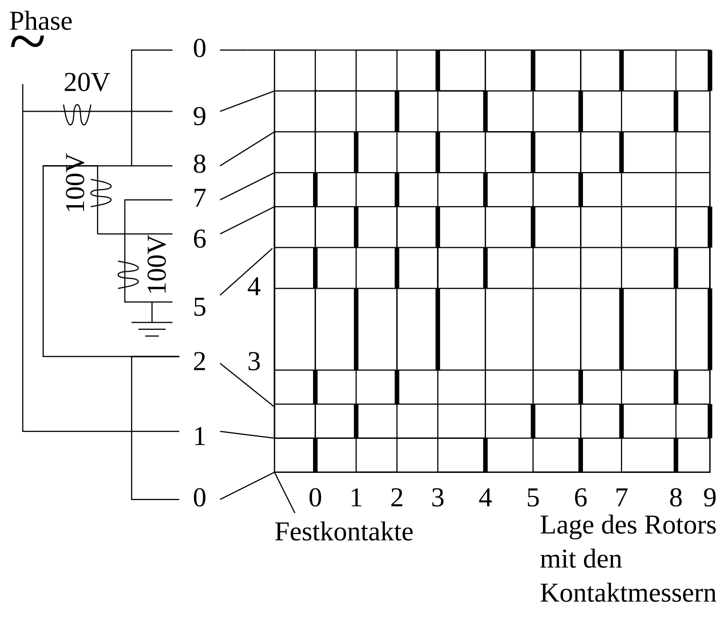
In einem elektronischen Gerät wird die Stromversorgung durch einen 50 Hz-Transformator bereitgestellt. Seine Primärwicklungen bestehen aus drei Teilen, davon zwei Wicklungen für 100V und eine für 20V. Letzterer Drahtquerschnitt ist doppelt so groß wie der der beiden anderen. Die Wicklungen werden auf 4 verschiedene Weisen zusammengeschaltet: Die beiden für 100V parallel, die beiden für 100V parallel genommen in Serie mit der 20V-Wicklung, die beiden für 100V in Serie, schließlich die beiden für 100V in Serie verlängert um die für 20V. Man kann auf diese Weise mit Netzspannungen von 100V, 120V, 200V und 220V arbeiten.

Der Wechsel zwischen den Spannungen geschieht durch Drehen eines zyklischen 10-poligen Schalters (alles modulo 10, d.h. $10 = 0$), wobei der rotierende Teil die Kontaktmesser trägt, die jeweils zwei benachbarte Kontakte des stehenden Teils miteinander verbinden. Der rotierende Teil ist zu vier Fünftel besetzt, d.h. es gibt Kontaktmesser für Verbindungen 01, 23, 45 und 67 aber die Positionen 8 und 9 bleiben leer. Die Anschlüsse an den stehenden Teil werden so verteilt: Nulleiter an 5, erste 100V-Wicklung von 5 nach 7, zweite 100V-Wicklung von 6 nach 8. Die 20V-Wicklung von 9 nach Phase, 1 ist an Phase, 0, 2, und 8 sind verbunden.

Im Bild sind alle möglichen Lagen des die Kontaktmesser tragenden Rotors eingezeichnet. Handelt es sich um eine nützliche Lage, so **verdicken Sie** bitte den Strich der dort leitenden Messer und **schreiben Sie** die Spannung an. Von den restlichen Lagen führen fünf zum Kurzschluß an der 20V-Wicklung, eine [No.   ] führt zu keinem Stromfluß.

Wegen welcher Spannung [V] wurde die 20V-Wicklung doppelt so stark ausgelegt, wie die beiden anderen. Wie steht es mit der **Orientierung der Wicklungen** von 5 nach 7, von 6 nach 8 und von 9 nach Phase [covariant oder contravariant]?

Historische Bemerkung: Neueste Technologie würde mit FET-geschalteten 100kHz arbeiten und die Spannung einfach über die Pulsweite nachregeln. Zusätzlich würde auch noch der Primärstrom phasengleich mit der Netzwechselspannung geführt werden (cos phi = 1).



Aufgabe II-2: Funktionale Vollständigkeit, maximale 2-wertige Clones von Post (4 Punkte)

Bei der Axiomatisierung der Aussagenlogik, d.h. der Klasse der Tautologien, verwendeten wir zwei Symbole: Pfeil und Haken, die als **Implikation** und **Negation** auf den Wahrheitswerten Wahr und Falsch interpretiert wurden. Man würde erwarten, daß diese Menge funktional vollständig ist.

Überprüfen Sie dies, indem Sie Posts Kriterium mit seinen maximalen Clones anrufen und jeden der für die Bestätigung erforderlichen Einträge rechtfertigen. (Sie erleichtern sich das Rechnen, wenn Sie beachten, daß x**impliziert**y semantisch dasselbe ist wie (**nicht**x)**oder**y. Z.B. für welchen Wert von x und welche Werte von y sieht man, daß x**impliziert**y nicht linear ist?)

[Tabelle zwei breit mal ..... tief (verwenden Sie bitte die Symbole für "Element von" und "nicht Element von" zum Ausfüllen!):

Daneben die Bestätigungen: (eine pro Zeile reicht; wählen Sie selbst!)

	$\neg$	$\rightarrow$

]

Aufgabe II-3: Limites in Kategorien (3 Punkte)

Zur Konstruktion aller Limites genügen einige wenige fundamentale: Produkt [ ], Summe = Coprodukt [ ], Differenzkern [ ], Differenzcokern [ ]. Geben Sie für jeden der genannten an, **ob** es sich um einen **oberen** (Abk. o) **oder** einen **unteren** (Abk. u) **Limes** handelt. Beantworten Sie **dieselbe Frage** für Pushout [ ] und Pullback [ ], und **zeichnen** Sie die **Diagramme**, deren Limites sie sind.
[Pushout: Pullback:]

Ist jede Untergruppe Kern eines Homomorphismus [Ja], **oder nur** Differenzkern zweier Homomorphismen [Ja]. Welchen älteren **Namen** [ ] tragen **Kerne** N von Gruppenhomomorphismen? **Schreiben Sie** die diese speziellen Untergruppen charakterisierende **Gleichung** [ ] und die damit äquivalente **Inklusion** [ ], richtig quantifiziert, auf.

Wenn wir in der Algebra von einer **Identität** reden, welchen **Quantor** müssen wir uns dazudenken, wenn er nicht hingeschrieben wurde [ ]? Schreiben Sie ohne Quantor hin die Identitäten: **Ass**oziativität [=], **Komm**utativität [=], **Idem**p**otenz [=] für eine infix (d.h. zwischen die Operanden) als Punkt notierte zweistellige Operation. Zeichnen Sie die beiden Bäumchen für die Assoziativität, genau zugeordnet den beiden Seiten ihrer Gleichung! [ ]

Aufgabe II-4: Erzeugung von Gittern, Kettenbedingung (6 Punkte)

Bestimmen Sie die kommutative **Gruppe** (das Gitter), die von den acht Vektoren der Länge SQRT(5) in **($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, +)** erzeugt wird (Abschluß unter Differenz!). Anders formuliert: Welche Felder [ ] erreicht der Springer (engl. knight) auf dem Schachbrett? (SQRT:=Quadratwurzel.) **Bestimmen** Sie die kommutative **Gruppe** (das Gitter), die von den vier Vektoren der Länge SQRT(2) in **($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, +)** erzeugt wird. Anders formuliert: Welche Felder erreicht der Läufer (engl. bishop) auf dem Schachbrett? Eine Basis dieser Untergruppe ist z.B. [ ]. Was ist ihr **Index** [ ] in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Geben Sie ein vollständiges **Vertretersystem** [ ] der Nebenklassen an! (Der Index von A in B ist die Anzahl der Nebenklassen. Kurze Nebenfrage für nichtkommutative Gruppen: Ist jede Untergruppe vom **Index 2** in ihrer Obergruppe **normal** [Ja oder Nein]? Dazu vergleichen Sie die Links- mit der Rechtsnebenklasse der 1! Und die verbleibende andere?)

Gibt es unendliche echt **aufsteigende Inklusionsketten** von Untergruppen in ($\mathbb{Z}^n$, +) [Ja oder Nein]? (^{n} notiert n-te direkte Potenz, also ein kartesisches Produkt von n gleichen Faktoren.) Zur Beantwortung denken Sie an **Dimension** und **Volumen**-in-dieser-Dimension. Kann die Dimension von Gittern in $\mathbb{Z}^n$ über alle Schranken wachsen [Ja oder Nein]? (Die Dimension von $\mathbb{Z}^n$ ist n, Dimension ist hier eine ganze Zahl.)

Kann das Volumen eines von einer Basis aufgespannten Parallelepipeds (so nennt man höherdimensionale Parallelogramme) in der momentan aktuellen Dimension unter jede Schranke schrumpfen [Ja oder Nein] (solche Volumina sind ganzzahlig)

Eine partielle Ordnung heisst **noethersch**, wenn es in ihr keine unendlichen echt absteigenden Folgen gibt. Welche Endlichkeitsbedingung [Es gibt auch keine unendlichen .] tritt noch hinzu bei **wohl**-partiellen Ordnungen? Die positiven ganzen Zahlen, geordnet durch **Teilbarkeit**, sind sie **wohl** [Ja oder Nein]? Sind sie noethersch [Ja oder Nein]?

Aufgabe II-5: Das Schiebespiel (7 Punkte)

Ein rechteckiges Feld ist mit numerierten quadratischen Steinen gefüllt, nur ein Stein fehlt zur vollständigen Füllung. Die Lücke L befinde sich am Anfang in der linken oberen Ecke. Nun wird die Lücke beliebig verschoben (jeder Schritt kann als Transposition einer Lücke mit einem Stein verstanden werden), bis sie nach längerer Zeit wieder links oben landet. **Welche Permutationen** der Steine kann man in hinreichend großen Rechtecken so durchführen [Genau die]?

Ist ein Zyklus mit einer geraden Anzahl von Punkten eine **gerade** [Ja] **oder** eine **ungerade** [Ja] Permutation? Kann also das Bild

L 1 2
3 4 5
6 7 8

überführt werden [Ja oder Nein] in

L 2 5
3 1 4 ?
6 7 8

Wie sieht **allgemein** eine Menge von Transpositionen aus, die die symmetrische Gruppe auf n Punkten erzeugt und für diese Eigenschaft **möglichst wenige** Transpositionen enthält? (Einen minimal einfachen zusammenhängenden Graphen nennt man einen [ ].) Die speziellen Beispiele sind: Pfad und Stern. **Wieviele Kanten** macht das bei n Punkten [genau]?

Finden Sie **alle** Darstellungen der Permutation (02) als **Produkt von drei** Faktoren aus der Menge {(01),(12)}. (Zwei gleiche aufeinanderfolgende Faktoren heben sich gegenseitig auf.)

[(02) =]

Stellen Sie **zwei disjunkte Transpositionen** als Produkt zweier Dreierzyklen dar. Stellen Sie einen **Dreierzyklus samt zwei Fixpunkten** als Produkt zweier Paare disjunkter Transpositionen dar.

[(01)(23) = (012)(3)(4) =

Zeichnung könnte helfen!]

Aufgabe II-6: Spiele (4 Punkte)

Beim Konzept von **Quantorentiefe**, das bei Ehrenfeucht-Fraissé-Spielen die Beziehung zur **Spiellänge** ermöglicht, darf man einen Block von k gleichnamigen aufeinanderfolgenden Quantoren zusammenfassen und als 1 zählen? [Ja oder Nein] Erläutern sie diese Beziehung anhand der Formel

[ ]

für **dichte** lineare (linear müssen Sie nicht hinschreiben) Ordnung. (Es geht um die spielerische Unterscheidung zweier linearer Ordnungen, deren eine eine Lücke zwischen zwei Elementen hat, deren andere aber keine Lücke aufweist. Letztere ist die dichte.)
[Spielverlauf, II0 bezeichne etwa den ersten Schritt von II, I2 den dritten von I:

lineare Ordnung mit Lücke: ....a b...........................
dichte lineare Ordnung: ....

]

Wie sind die Teilquantoren "für alle" und "es gibt" des Spielequantorens den beiden Spielern I und II **zuzuordnen**, wenn er, der Spielequantor, die Existenz einer Gewinnstrategie für beschreiben soll. (Umgangssprache: Ich kann/Was immer ich tu' ...) [zu I zu II]

Bis zu welcher **ungefähren Länge** n (Größenordnung) kann man zwei verschiedene endliche lineare Ordnungen voneinander durch das Spiel der Länge k unterscheiden [n= (k)]? (Divide et impera!)

Aufgabe II-7 (3 Punkte)

Die Symmetriegruppe einer Mengenpartition besteht aus allen Permutationen der Grundmenge, die gleichgroße Blöcke vertauschen und den Inhalt eines jeden Blocks beliebig umrühren dürfen. So hat also die Symmetriegruppe der Partition 887775555 (die Pluszeichen haben wir nicht geschrieben) von 57 die Größe 2!8!8!3!7!7!7!4!5!5!5!5!.

Finden Sie die informationsreichste (entspricht kleinster Symmetriegruppe) Partition von 4008 in **genau vier** Blöcke. Was spricht gegen die Partition 4002 + 3 + 2 + 1 und was andererseits gegen 1002 + 1002 + 1002 + 1002 ? (Beachte: (n+a)/(n + b) strebt gegen 1, wenn n groß wird.) Die mit den wenigsten Symmetrien ist also: [+ + +]

Bei dieser Aufgabe wäre ein Rechner nur hinderlich.

Aufgabe III-1[1]

Wieviele Multiplikationen (incl. Quadrierungen) benötigt das Verfahren der "schnellen Exponentiation" (Algorithmus `pot`) für die Berechnung von a^k in einer Halbgruppe

(a) für $k = 234$?

Multiplikationen

(2 P.)

(b) im Mittel (bei Gleichverteilung über alle Möglichkeiten) für Exponenten k mit Bitlänge $l(k) = n$?

Multiplikationen

(2 P.)

Aufgabe III-2[1]

Welches sind die Lösungstypen, angegeben durch die Landau-**Θ**-Notation, für die divide-and-conquer-Rekursion

$$T(n) = a \cdot T(n/2) + c \cdot n \; (n > 1), T(1) = d$$

wobei a,c,d positive Konstante und die Argumente Potenzen von 2 sind.

$$T(n) \in \begin{cases} \boldsymbol{\Theta}(\qquad\qquad) & \text{für a} < 2 \\ \boldsymbol{\Theta}(\qquad\qquad) & \text{für a} = 2 \\ \boldsymbol{\Theta}(\qquad\qquad) & \text{für a} > 2 \end{cases}$$

(3 P.)

Aufgabe III-3[1]

(a) Es seien a,b $>$ 0 natürliche Zahlen. Wieviele ganzzahlige Gitterpunkte (x, y) mit x, y $\in$ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ liegen auf der durch die Punkte (a, 0) und (0, b) bestimmten Geraden der euklidischen Ebene?

Gitterpunkte

(1 P.)

(b) Wieviele sind es speziell für a $= 255 = 2^8 - 1$ und b $= 1023 = 2^{10} - 1$?

Gitterpunkte

(1 P.)

1. Jeweils nur die Antwort in den Kasten eintragen; keine Begründung erforderlich!

Aufgabe III-4

Ein einfaches Verfahren, ein Element X in einer sortierten Liste $L=[L_1, L_2, \ldots, L_n]$ von verschiedenen Elementen aus einer totalgeordneten Menge M zu lokalisieren (also l mit $1 \leq l \leq n$ und $X = L_l$ bestimmen) oder seine Abwesenheit festzustellen, besteht darin, sich die Liste L als Folge von $q = n$ div k Teillisten $L^{(i)} = [L_{i \cdot k+1}, L_{i \cdot k+1}, \ldots, L_{(i+1) \cdot k}]$ $(0 \leq i < q)$ und (falls $k \nmid n$) einer Restliste $L^{(q)} = [L_{q \cdot k+1}, \ldots, L_n]$ vorzustellen. In einer „Grobsuche" stellt man zunächst fest, welche der Teillisten das Element X überhaupt enthalten kann. Bei der „Feinsuche" durchsucht man dann diese spezielle Liste linear.

(a) Was ist die Anzahl $f(n,k)$ von Vergleichsoperationen[2], die dieses Verfahren im worst-case benötigt?
Geben Sie neben Ihrer Antwort auch eine kurze Begründung!

(2 P.)

(b) Wie wählt man k in Abhängigkeit von n, um $f(n,k)$ zu minimieren?
Geben Sie neben Ihrer Antwort auch eine kurze Begründung!

(2 P.)

---

2. Gemeint sind Operationen, die für Elemente Y und Z aus M die Information liefern ob $Y < Z$ oder $Y = Z$ oder $Y > Z$ ist.

Aufgabe III-5

Der Sortieralgorithmus `mergesort` basiert auf einer Prozedur `merge`, die als Input zwei sortierte Listen von Elementen aus einer totalgeordneten Menge nimmt und die sortierte Liste aller im Input vorkommenden Elemente zurückgibt. Funktional kann `merge` beschrieben werden durch

$$\texttt{merge}([],[]) = []$$

$$\texttt{merge}(A,[]) = A$$

$$\texttt{merge}([],B) = B$$

$$\texttt{merge}(hA\colon tA,\ hB : tB) = \texttt{if } hA < hB \texttt{ then } \mathrm{hA}\colon \texttt{merge } (tA,\ hB\colon tB)$$
$$\texttt{else } hB\colon \texttt{merge } (hA\colon tA,\ tB)$$

Dabei bezeichnet [] die leere Liste und $hA\colon tA$ die Zerlegung einer nichtleeren Liste in Kopfelement hA („head”) und Restliste tA („tail”).

(a) Konstruieren Sie den Entscheidungsbaum, der bezüglich der Vergleichsoperatoren die Anwendung von merge als Algorithmus auf zwei sortierte Listen $[a, b]$ und $[c, d]$ der Länge 2 beschreibt. Dabei sind a, b, c, d (verschiedene) Elemente einer totalgeordneten Menge und es gilt $a < b$ und $c < d$.

(3 P.)

(b) Bestimmen Sie die mittlere Höhe des in (a) konstruierten Entscheidungsbaumes.

(1 P.)

(c) Sind A und B Listen der Länge n, so hat der Entscheidungsbaum für den Aufruf merge(A, B) $\binom{2n}{n}$ Blätter. Ws folgt daraus für die Asymptotische Anzahl von Vergleichsoperationen von `merge` in dieser Situation?
Hinweis: verwenden Sie $n! \sim (n/e)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$.

(3 P.)

Aufgabe III-6

Erläutern Sie in Form eines Kurzaufsatzes (also inhaltlich gegliedert und mit ausformulierten Sätzen) die wesentlichen Aspekte des **euklidischen Algorithmus**.
Gehen Sie insbesondere auf Aspekte der Spezifikation (Was soll berechnet werden?), der algorithmischen Idee, Korrektheit und Terminierung (Wie wird es gemacht? Warum funktioniert es?) und der Effizienz (Mit welchem Aufwand wird das Ziel erreicht?) ein;
erläutern Sie Anwendungen.

(10 P.)