UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG, INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

DIPLOMVORPRÜFUNG (2. Teil, INF)

Mathematik für Ingenieure III + WR I, 02.04.2008, 8:00–10:00 Uhr

Dr. S. Kräutle, Dr. F. Graef

Zugelassen sind alle schriftlichen Hilfsmittel, **nicht** zugelassen sind elektronische Geräte.

***** LÖSUNGSVORSCHLAG *****

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + x - xy^2$$

auf der Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Lösungsvorschlag:

Es ist sowohl im Inneren der Kreisscheibe als auch auf dem Rand der Kreisscheibe nach 'kritischen Stellen', also nach Stellen, an denen sich lokale Extrema befinden können, zu suchen. Sind alle kritischen Stellen ermittelt, so bestimmt man Miniumum und Matximum der Funktion auf K, indem man f an allen kritischen Stellen auswertet; die Berechnung der Hesse-Matrix ist nicht erforderlich.

Der Rand wird beschrieben durch $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Es ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 1 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Kritische Stellen im Inneren der Kreisscheibe:
Kriterium: $\nabla f(x,y) \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow 2x + 1 - y^2 = 0 \ \wedge xy = 0$
1. Fall $x = 0$: $\Longrightarrow y = \pm 1$ (liegt am Rand von K)
2. Fall $y = 0$: $\Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$
$f(0, \pm 1) = 0, \qquad f(-1/2, 0) = -\frac{1}{4}$
Kritische Stellen auf dem Kreisrand:
Kriterium: $\nabla f = \lambda \nabla g \ \wedge g = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{lllll} \text{(I)} & 2x + 1 - y^2 & = & 2\lambda x \\ \text{(II)} & -2xy & = & 2\lambda y \\ \text{(III)} & x^2 + y^2 & = & 1 \end{array}$$

Faktorisieren von (II) liefert

$$\text{(II')} \quad y\,(x + \lambda) = 0$$

Es sind also folgende 2 Fälle zu untersuchen:
1. Fall $y = 0$: $\stackrel{\text{(III)}}{\Longrightarrow} x = \pm 1,\ f(1,0) = 2,\ f(-1,0) = 0$
2. Fall $\lambda = -x$: damit λ in (I) eliminieren:

$$2x + \underbrace{1 - y^2}_{=x^2} = -2x^2 \Longleftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \stackrel{\text{(III)}}{\Longrightarrow} y = \pm 1 \text{ bzw. } y^2 = 1 - x^2 = \frac{5}{9}$$

$f(0, \pm 1) = 0$ (oben bereits erfasst), $\quad f(-2/3, \pm\sqrt{5/9}) = \frac{4}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{2}{9} + \frac{10}{27} = \frac{4}{27}$

Bestimmung derjenigen kritischen Stellen, an denen der kleinste/größte Funktionswert angenommen wird, liefert:

$$\max_K f(x,y) = 2, \quad \min_K f(x,y) = -\frac{1}{4}$$

(wobei das Maximum in $(1,0)$ und das Minimum in $(-1/2, 0)$ angenommen wird).

Aufgabe 2 **(4 + 2 + 4 + 2 = 12 Punkte)**

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3 + y + z \\ x + y^3 + z \\ x + y + z^3 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel. Berechnen Sie das Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes:

$$\int\limits_K \operatorname{div} \mathbf{V} \, d\mathbf{x}$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Potential besitzt.

c) Berechnen Sie ein zu $\mathbf{V}$ gehörendes Potential.

d) Bestimmen Sie (möglichst einfach) den Wert des Kurvenintegrals

$$I = \int\limits_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

wobei Γ die Kurve

$$\mathbf{x} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t \\ t(1-t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ist.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen (für a) und b)) die Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{JV}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 & 1 \\ 1 & 1 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

a) $\Longrightarrow \operatorname{div} \mathbf{V} = 3\,(x^2+y^2+z^2)$.
Mit der 'üblichen' Parametrisierung einer Kugel bekommen wir $\operatorname{div} \mathbf{V} = r^2$ und

$$\begin{aligned} \int\limits_K \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \, \mathbf{dx} &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{r=0}^{1} 3r^2 \cdot r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \int\limits_0^1 3r^4 \, dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi \end{aligned}$$

b) Die Matrix $\mathbf{JV}$ ist symmetrisch, und das Gebiet $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend
$\Longrightarrow \mathbf{V}$ hat Potential

c) Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein Potential auszurechnen:

- Variante 1: Als Kurvenintegral über $\gamma(t) := t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $t \in [0,1]$; $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) &= \int\limits_1^0 \mathbf{V}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} t^3x^3+t(y+z)\\ t^3y^3+t(x+z)\\ t^3z^3+t(y+z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} dt\\
&= (x^4+y^4+z^4)\int\limits_0^1 t^3\,dt + 2\,(xy+xz+yz)\int\limits_0^1 t\,dt\\
&= \frac{1}{4}\,(x^4+y^4+z^4) + xy+xz+yz
\end{aligned}$$

– Variante 2: Integration entlang der Koordinatenachsen (kann ebenfalls als ein Kurvenintegral aufgefasst werden):

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) &= \int\limits_0^x V_1(\xi,0,0)\,d\xi + \int\limits_0^y V_2(x,\eta,0)\,d\eta + \int\limits_0^z V_3(x,y,\zeta)\,d\zeta\\
&= \int\limits_0^x \xi^3\,d\xi + \int\limits_0^y (x+\eta^3)\,d\eta + \int\limits_0^z (x+y+\zeta^3)\,d\zeta\\
&= \frac{1}{4}x^4 + xy + \frac{1}{4}y^4 + xz + yz + \frac{1}{4}z^4
\end{aligned}$$

– Variante 3: durch wiederholtes Aufintegrieren und Ableiten:
Ein Potential p zu $\mathbf{V}$ ist definiert durch

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & p_x(x,y,z) \stackrel{!}{=} V_1(x,y,z) = x^3+y+z\\
\text{(II)} & p_y(x,y,z) \stackrel{!}{=} V_2(x,y,z) = x+y^3+z\\
\text{(III)} & p_z(x,y,z) \stackrel{!}{=} V_3(x,y,z) = x+y+z^3
\end{array}$$

Aufintegrieren von (I) nach x liefert $p(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 \cancel{+xy+xz} + c(y,z)$. Dies wird nach y abgeleitet und mit (II) verglichen:
$p_y(x,y,z) + x + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = V_2 = x+y^3+z$ woraus folgt $\frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = y^3+z$. Integration bezüglich y liefert $c(y,z) = \frac{1}{4}y^4+zy+\tilde{c}(z)$, also $p(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4+xy+xz+yz+\tilde{c}(z)$.
Ableiten nach z und Vergleich mit (III) liefert
$p_z(x,y,z) = x+y+\tilde{c}'(z) = V_3 = x+y+z^3$, woraus $\tilde{c}'(z) = z^3$, also $\tilde{c}(z) = \frac{1}{4}z^4 + \tilde{\tilde{c}}$ folgt. Mit z.B. $\tilde{\tilde{c}}=0$ folgt das gleiche Potential wie unter Variante 1 oder Variante 2.

d) Da $\mathbf{V}$ ein Potential hat, und dieses auch schon bekannt ist, ist es naheliegend, Kurvenintegrale über den Potentialwert am Anfangs- und Endpunkt der Kurve auszurechnen:

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad I = p(\gamma(1)) - p(\gamma(0)) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Aufgabe 3 **(6 + 6 = 12 Punkte)**

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (t+1)\,y + \exp(\frac{t^2}{2})\,.$$

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Es handelt sich um eine inhomogene skalare lineare Dgl. Man bestimmt also zunächst die Lösungen der zugehörigen *homogenen* Dgl und anschließend eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl:

Lösen der homogenen Dgl $y' = (t+1)\,y$ mittels Trennung der Variablen:
$\frac{y'}{y} = t+1 \Longrightarrow \ln|y| = \frac{t^2}{2} + t \Longrightarrow y_{hom}(t) = \exp(\frac{t^2}{2} + t)$ ist eine homogene Lösung; cy_{hom} mit $c \in \mathbb{R}$ ist die Gesamtheit der homogenen Lösungen.

Bestimmung einer partikulären Lösung mittels 'Variation der Konstanten':
Ansatz $y_p(t) := c(t)y_{hom}(t) \Longrightarrow y_p' = c'y_{hom} + cy_{hom}'$
Einsetzen von y_p und y_p' in die inhomogene Dgl $y_p' = (t+1)\,y_p + \exp(\frac{t^2}{2})$ liefert
$c'y_{hom} + cy_{hom}' = c(t)\,(t+1)\,y_{hom}(t) + \exp(\frac{t^2}{2})$
$\Longleftrightarrow c'y_{hom} = \exp(\frac{t^2}{2}) \Longleftrightarrow c' = \frac{\exp(\frac{t^2}{2})}{\exp(\frac{t^2}{2}+t)} = e^{-t}$
eine Lösung ist $c(t) = -e^{-t}$, also $y_p(t) = c(t)y_{hom}(t) = -\exp(\frac{t^2}{2})$.

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y(t) = -e^{\frac{t^2}{2}} + \alpha e^{\frac{t^2}{2}+t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

b) Es handelt sich um ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanter Koeffizientenmatrix.
Bestimmung der Eigenwerte, Eigenvaktoren und ggf. Hauptvektoren:
Entwicklung nach der dritten Zeile (Nullen ausnutzend!):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2-\lambda)\,[(1-\lambda)(3-\lambda)+1] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3 \end{aligned}$$

(Was man *auf keinen Fall* tut: Das '$2-\lambda$' in den restlichen Term hineinmultiplizieren!)
Also: Es gibt nur einen Eigenwert $\lambda = 2$. Bestimmung des Eigenraums:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum ist eindimensional, wird von $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Man weiß also, dass noch ein Hauptvektor zweiter Stufe sowie ein Hauptvektor dritter Stufe zu finden ist.
Den Hauptvektor zweiter Stufe $\mathbf{v_2}$ erhält man als Lösung von $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}$. Für den obigen Vektor $\mathbf{v_1}$ ist das

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}\,|\,\mathbf{v_1}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist z.B. $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein HV 2. Stufe (alle Vektoren der Form $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \mathbf{v_1}$ wäre hier ebenfalls richtig). Falls man sich oben für den EW $\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entschieden hat, so sind $\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1}$ zulässige Hauptvektoren 2. Stufe.

Suche nun einen HV $\mathbf{v_3}$ dritter Stufe als Lösung des LGS $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v_3} = \mathbf{v_2}$. Für obige Wahl von $\mathbf{v_2}$ bekommt man

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I} \,|\, \mathbf{v_2}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und somit z.B. $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Fundamentalsystem lautet somit z.B.

$$\{e^{\lambda t}\mathbf{v_1},\ e^{\lambda t}(\mathbf{v_2} + t\mathbf{v_1}),\ e^{\lambda t}(\mathbf{v_3} + t\mathbf{v_2} + \frac{t^2}{2}\mathbf{v_1})\} =$$

$$\left\{ e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e^{2t}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right],\ e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \right\}$$

Viel Erfolg !