Universität Erlangen-Nürnberg, Institut für Angewandte Mathematik

DIPLOMVORPRÜFUNG (2. Teil, INF)

Mathematik für Ingenieure III + WR I, 28.09.2007, 8:00–10:00 Uhr

Dr. S. Kräutle, Dr. F. Graef

Zugelassen sind alle schriftlichen Hilfsmittel, **nicht** zugelassen sind elektronische Geräte.

Aufgabe 1 **($2+8+1=11$ Punkte)**

Gesucht sind das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = 12y - x^3$$

unter der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

a) Warum existieren dieses Maximum und Minimum? (keine Rechnung!)

b) Berechnen Sie Maximum und Minimum unter Verwendung des Lagrange-Formalismus.

c) Untersuchen Sie, ob f unter der Ungleichheits-Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{4} + y^2 < 1$$

Extremwerte annimmt.

Aufgabe 2 **($2+4+2+4=12$ Punkte)**

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (y-1-x)\,e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{V}$ ein Potential besitzt.

b) Berechnen Sie ein zu $\mathbf{V}$ gehörendes Potential.

c) Bestimmen Sie (möglichst einfach) den Wert des Kurvenintegrals

$$I = \int_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

wobei Γ die Kurve

$$\mathbf{x} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

ist.

d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\mathbf{x} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t^{3/2} - t \\ \frac{2}{3}t^{3/2} + t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3.$$

Aufgabe 3 **(5 + 8 = 13 Punkte)**

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'' = (y')^2\, t^2, \quad y(1) = \frac{5}{2}, \quad y'(1) = -3.$$

Hinweis: Substituieren Sie so, dass das gegebene skalare AWP zweiter Ordnung in ein skalares AWP erster Ordnung überführt wird, lösen Sie dieses.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der diskreten Verteilung mit der erzeugenden Funktion

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{4 - 3z^2}$$

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. X_1 sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda = 1$ und die Verteilung von X_2 besitze die Verteilungsfunktion $F(t)$ mit $F(t) = 0$ für $t \leq 0$ und

$$F(t) = 1 - e^{-t^2}$$

für $t > 0$.
Berechnen Sie die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen

$$Y = \frac{X_1}{X_2^2}$$

Hinweis: Bei direkter Anwendung des Transformationssatzes empfiehlt sich die Ergänzung $y_2 = x_2^2$

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Der Zufallsvektor (X_1, X_2, X_3) sei normalverteilt mit $\mathcal{E}X_1 = \mathcal{E}X_2 = \mathcal{E}X_3 = 0$ und der Kovarianzmatrix

$$\mathcal{C}_X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und λ eine reelle Zahl.
Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Zufallsvariablen $U = X_1 + \lambda X_2$ und $V = X_1 - \lambda X_3$.
Gibt es einen Wert von λ, für den U und V stochastisch unabhängig sind?

Viel Erfolg !