LÖSUNG (der Mathe-III-Aufgaben) der
KLAUSUR
MATHEMATIK III UND STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER
Kurzweil/Graef
Erlangen, den 05.10.2005
Bearbeitungszeit: 120 min

Aufgabe III-1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\,(x^2 - y^2)\; e^{-x^2 - y^2}$$

gegeben.

a) Bestimme die Richtung des steilsten Abstiegs $\underline{r} \in \mathbb{R}^2$ (mit $\|\underline{r}\| = 1$) von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$.

b) Bestimme die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \underline{r}}$ mit $\underline{r}$ aus a) an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$.

c) Bestimme die Tangentialebene $E \subset \mathbb{R}^3$ an den Graphen der Funktion f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$.

(15 Punkte)

Lösung.

a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (x - x^3 + xy^2)\, e^{-(x^2+y^2)} \\ (-y + y^3 - x^2 y)\, e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} e^{-2} \\ -e^{-2} \end{pmatrix}$$

Die Richtung des steilsten Abstiegs (siehe Vorlesung, Übung) ist durch den negativen Gradienten $-\nabla f(1,1)$ gegeben. Normiert:

$$\underline{r} = -\frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

b) Einfacher Rechenweg für die Richtungsableitung: Mit der Formel

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{r}} = [\nabla f(x_0, y_0), \underline{r}] = -\frac{\|\nabla f(1,1)\|^2}{\|\nabla f(1,1)\|} = -\|\nabla f(1,1)\| = -\sqrt{2} e^{-2}$$

Komplizierterer Weg: Mit der Definition

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{r}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{r}) - f(\bar{x}_0)}{h} :$$

$$\frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{r}) - f(\bar{x}_0)}{h} = \frac{f\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{h}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{((1 - \frac{h}{2}\sqrt{2})^2 - (1 + \frac{h}{2}\sqrt{2})^2)\ \exp(-(1 - \frac{h}{2}\sqrt{2})^2 - (1 + \frac{h}{2}\sqrt{2})^2)}{h}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{-2h\sqrt{2}}{h}\, e^{-2-\frac{h^2}{2}} = -\sqrt{2}\, e^{-2-\frac{h^2}{2}}$$

$$\overset{(h\to 0)}{\Longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} = -\sqrt{2}\, e^{-2}$$

c) Zwei Möglichkeiten:
1. Variante (setzt etwas räumliche Vorstellung voraus):
Suche Parameterdarstellung $E : \underline{z} + \lambda \underline{r_1} + \mu \underline{r_2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Ein Punkte $\underline{z} \in E$ ist offensichtlich $\underline{z} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Als Richtungsvektoren 'entlang der Ebene' sind am naheliegendsten
$\underline{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{-2} \end{pmatrix}$ und $\underline{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -e^{-2} \end{pmatrix}$
2. Variante: Suche Darstellung $z = g(x, y)$.
Nehme dazu die Formel (Übung)

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \left[\nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right] = f(1,1) + \left[\begin{pmatrix} e^{-2} \\ -e^{-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}\right] \\ &= 1 + e^{-2}x - e^{-2}y \end{aligned}$$

Dies ist übrigens nichts anderes als die Taylor-Formel (bis zum Glied erster Ordnung).

Aufgabe III-2.

a) Gegeben sei die Funktion F und die Kurve $\gamma_1 : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + 2y^2}, \frac{2y}{x^2 + 2y^2}\right), \qquad \gamma_1(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t).$$

(i) Zeige, dass F ein Potential hat auf dem Gebiet
$D_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$.

(ii) Was ist der Wert des Kurvenintegrals $\int\limits_{\gamma_1} F\, d\underline{s}$ über dem Kreis γ_1 ?

b) Gegeben sei die Funktion G und die Kurve $\gamma_2 : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(x,y) = \left(\frac{-\sqrt{2}\, y}{x^2 + 2y^2}, \frac{1 + \sqrt{2}\, x}{x^2 + 2y^2}\right), \qquad \gamma_2(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sin t).$$

(i) Berechne den Wert des Kurvenintegrals $\int\limits_{\gamma_2} G\, d\underline{s}$ über der Ellipse γ_2.

(ii) Hat G ein Potential auf $D_G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x} \neq \underline{0}\}$?

(15 Punkte)

Lösung.

a) (i) Das Gebiet D_F ist einfach zusammenhängend. Daher reicht es zu zeigen, dass $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ gilt, wobei F_1, f_2 die Komponenten von F sind:

$$\frac{\partial}{\partial y}\, \frac{x}{x^2 + 2y^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + 2y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{2y}{x^2 + 2y^2}$$

$\Longrightarrow$ Es existiert ein Potential.

(ii) Die Kurve γ_1 ist eine geschlossene Kurve innerhalb von D_F. Da F nach (i) ein Potenzial hat, muss das Integral (Satz!) den Wert 0 haben. Fertig.
Wer das nicht weiß, kann auch mit der Mit-dem-Kopf-durch-die-Wand-Methode reüssieren:

$$\begin{aligned}\int \gamma_1 F\, d\underline{s} &= \int_0^{2\pi} [F(\gamma_1(t)), \gamma'(t)]\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \left[\begin{pmatrix} \frac{1+\cos t}{(1+\cos t)^2+2(1+\sin t)^2} \\ \frac{2+2\sin t}{(1+\cos t)^2+2(1+\sin t)^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{-\sin t + \sin t\cos t + 2\cos t}{3 + 2\cos t + 4\sin t + \cos^2 t + 2\sin^2 t}\, dt\end{aligned}$$

Der Nenner kann wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ geschrieben werden als

$$4 + 2\cos t + 4\sin t + \sin^2 t,$$

und nun erkennt man, dass der Zähler gerade 1/2 mal die Ableitung des Nenners ist:

$$\int \gamma_1 F\, d\underline{s} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(4 + 2\cos t + 4\sin t + \sin^2 t)'}{4 + 2\cos t + 4\sin t + \sin^2 t}\, dt,$$

was die Anwendung der Substitutionsregel ermöglicht:

$$\int \gamma_1 F\, d\underline{s} = \frac{1}{2} \ln(4 + 2\cos t + 4\sin t + \sin^2 t)|_0^{2\pi},$$

und dies ist, wegen der 2π-Periodizität des Argumentes des ln gleich null.

b) (i)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_2} G\, d\underline{s} &= \int\limits_0^{2\pi} [G(\gamma_2(t)), \dot\gamma_2(t)]\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \left[\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}\sin t}{2\cos^2 t + 2\sin^2 t} \\ \frac{1+2\cos t}{2\cos^2 t+2\sin^2 t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t \\ \frac{1}{2} + \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} (\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos t + \cos^2 t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} 1\, dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \cos t)\, dt = 2\pi + 0 = 2\pi\end{aligned}$$

(ii) Hätte G ein Potential auf D_G, so müssten alle Kurvenintegrale über geschlossene Kurven den Wert null haben. Das Integral aus (i) ist jedoch $\neq 0$. Daher hat G kein Potential.
Bemerkung: Man kann, was aufwändiger ist, das Kriterium ('Integrabilitätskriterium') aus a)(i) anwenden: Diese ist nicht erfüllt, daher kein Potential.
Bemerkung: Die Anmerkung, dass das Gebiet nicht einfach zusammenhägend ist, ist nutzlos. Denn: Auch auf Gebieten mit Löchern können Funktionen Potentiale haben! Man nehme einfach irgendeine Funktion mit Potential auf einem Gebiet, und schneide dann ein Loch ins Gebiet, dann hat die Funktion eingeschränkt auf das gelochte Gebiet immer noch ein Potential.

Aufgabe III-3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems.

b) Bestimme eine Lösung $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der inhomogenen Differentialgleichung, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ *konstant*, d.h. unabhängig von t, sind.

c) Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

d) Bestimme die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zum Anfangswert $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(15 Punkte)

Lösung.

a) Eigenwerte berechnen:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 16 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 16 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 4,$$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5.$
Eigenräume berechnen:

$$\text{Eig}(-3): \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eig}(-3) = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig}(5): \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eig}(-3) = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Fundamentalsystem: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} \right\}$

b) Ansatz: $\underline{x_p}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x_p}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Einsetzen in Dgl. liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) In b) wurde bereits eine partikuläre inhomogene Lösung bestimmt; den aufwändigen Ansatz über Variation der Konstanten kann man sich also sparen. Man liest aus a) und b) die allgemeine Lösung ab:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

d) Bestimme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ aus c) so, dass $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = -1,\ c_2 = 1$$

$$\Longrightarrow \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-3t} + e^{5t} \\ 2(1 + e^{-3t} + e^{5t}) \end{pmatrix}$$

Aufgabe WR-1.
Ein Würfel, bei dem die Augenzahl Sechs mit Wahrscheinlichkeit p auftritt, wird mehrmals geworfen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint beim n-ten Wurf zum genau dritten Mal die Augenzahl Sechs?
b) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Würfe bis zum dritten Auftreten der Augenzahl Sechs.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-2.
Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, X_2) besitze die Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-(2x_1+x_2)} & \text{falls} \quad x_1 > 0 \quad \text{und} \quad x_2 > x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und es sei $Y = X_1/X_2$.
a) Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen Y.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(Y > 1/2)$.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-3.
(X_1, X_2) sei ein normalverteilter Zufallsvektor mit $\mathcal{E}X_1 = \mathcal{E}X_2 = 0$ und der Kovarianzmatrix

$$\mathcal{C}_X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

und es sei $Y_1 = aX_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1 + 2X_2$.
Für welche Werte des Parameters a sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?

(15 Punkte)

Summe: 90 Punkte