Lösungsvorschlag für die
KLAUSUR
MATHEMATIK III UND STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER

Strauß/Graef/Kräutle

Erlangen, den 04.04.2007
(HIER NUR DER MATHE-III-TEIL)
Bearbeitungszeit für *gesamte* Klausur: 120 min

Aufgabe III-1. Gegeben sei der Hohlzylinder

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : r_1^2 \le x^2 + y^2 \le r_2^2, \;\; 0 \le z \le H \right\}, \quad r_2 > r_1 > 0, \;\; H > 0$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ \sin z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\int\limits_{\partial B} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

wobei ∂B der Rand von B ist, unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

(12 Punkte)

Lösung. Nach dem Satz von Gauß:

$$I := \int\limits_{\partial B} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_{B} \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Es ist

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \cos z.$$

Parametrisierung des Hohlzylinders (Zylinderkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \;\;, \quad \text{wobei } r \in [r_1, r_2], \; \varphi \in [0, 2\pi), \; h \in [0, H]. \\ z &= h \end{aligned}$$

Nach dem Transformationssatz für Volumenintegrale (die Jacobi-Determinante der Transformation ist bei Zylinderkoordinaten gleich r):

$$I = \int\limits_0^H \int\limits_{r_1}^{r_2} \int\limits_0^{2\pi} r \cos h \, d\varphi \, dr \, dh = 2\pi \int\limits_0^H h \, dh \int\limits_{r_1}^{r_2} r \, dr = \pi \, (r_2^2 - r_1^2) \, \sin H$$

Aufgabe III-2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Differenzialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}.$$

(12 Punkte)

Lösung. Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

und hat eine doppelte Nullstelle $\lambda = 2$.
Ein Fundamentalsystem lautet also

$$\{e^{2x}, x\,e^{2x}\}.$$

Bestimmen einer partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung mittels des Ansatzes vom Typ der rechten Seite:
Ohne Resonanz wäre der korrekte Ansatz ae^{2x}. Da aber 2 doppelte Nullstelle von p ist ("Resonanzfall"), ist ein Faktor x^2 einzufügen, also der Ansatz

$$y_p(x) = ax^2e^{2x}$$

zu verwenden. Es folgt

$$y_p'(x) = ae^{2x}(2x + 2x^2), \quad y_p''(x) = ae^{2x}(2 + 8x + 4x^2).$$

Einsetzen von y_p, y_p', y_p'' in die inhomogene Differenzialgleichung liefert

$$2ae^{2x} = e^{2x}$$

(alle anderen Terme heben sich weg). Also

$$a = \frac{1}{2}, \quad y_p = \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

(An dieser Stelle sollte man die *Probe* machen!)
Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} = (c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2)\,e^{2x}, \quad c_1, c_2, \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe III-3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differenzialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(x)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(12 Punkte)

Lösung.
Bestimmung der Eigenwerte:
$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ z.B. nach der ersten Zeile oder Spalte entwickelt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} + 8 = (-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda)+4] + 8 = (-\lambda)(12-6\lambda+\lambda^2) + 8 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

Als mögliche ganzzahlige Nullstellen kommen die ganzzahligen Teiler des absoluten Gliedes 8 in Frage. Durch Probieren findet man die Nullstelle $\lambda = 2$.
Polynomdivision durch den zugehörigen Linearfaktor ergibt

$$(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) : (\lambda - 2) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Es ist also $\lambda = 2$ (einziger) Eigenwert, mit algebraischer Vielfachheit 3.
Bestimmung des Eigenraumes:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass der Eigenraum nur eindimensional ist und von $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Dies liefert nur eine Fundamentallösung $\mathbf{v_1} e^{2x}$. Um weitere Fundamentallösungen zu finden, sind Hauptvektoren zu bestimmen. Da die Dimension des Eigenraumes eins ist, ist genau ein Hauptvektor zweiter Stufe und danach ein Hauptvektor dritter Stufe zu bestimmen.
Bestimmung eines Hauptvektors $\mathbf{v_2}$ zweiter Stufe als Lösung des Gleichungssystems $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}$:
Analog zu oben

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}|\mathbf{v_1}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ein Lösung ist z.B. $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Der Hauptvektor zweiter Stufe ist natürlich nicht eindeutig bestimmt; neben diesem $\mathbf{v_2}$ ist auch jeder Vektor $\mathbf{v_2} + \alpha\mathbf{v_1}$, $\alpha \in I\!R$, ein Hauptvektor zweiter Stufe.)

Bestimmung eines Hauptvektors $\mathbf{v_3}$ dritter Stufe als Lösung des Gleichungssystems $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{v_3}=\mathbf{v_2}$: Analog zu oben

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I}|\mathbf{v_2}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ein Lösung ist z.B. $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ein Fundamentalsystem lautet:

$$\{\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}\}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathbf{y_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}, \\
\mathbf{y_2} &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] e^{2x}, \\
\mathbf{y_3} &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{2x}
\end{aligned}$$