Universität Erlangen-Nürnberg, Institut für Angewandte Mathematik

DIPLOMVORPRÜFUNG (2. Teil, INF)

Mathematik für Ingenieure III + WR I, 02.04.2008, 8:00–10:00 Uhr

Dr. S. Kräutle, Dr. F. Graef

Zugelassen sind alle schriftlichen Hilfsmittel, **nicht** zugelassen sind elektronische Geräte.

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + x - xy^2$$

auf der Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Aufgabe 2 **($4+2+4+2=12$ Punkte)**

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3+y+z \\ x+y^3+z \\ x+y+z^3 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel. Berechnen Sie das Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes:

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{V} \, d\mathbf{x}$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Potential besitzt.

c) Berechnen Sie ein zu $\mathbf{V}$ gehörendes Potential.

d) Bestimmen Sie (möglichst einfach) den Wert des Kurvenintegrals

$$I = \int_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

wobei Γ die Kurve

$$\mathbf{x} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t \\ t(1-t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ist.

Aufgabe 3 **($6 + 6 = 12$ Punkte)**

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (t+1)\,y + \exp(\frac{t^2}{2})\,.$$

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg !