KLAUSUR
MATHEMATIK III UND STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER
Kurzweil/Graef
Erlangen, den 07.04.2006
Bearbeitungszeit: 120 min

Aufgabe III-1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{(x+y)\,y}{(x+y)^2 + (x-y)^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

a) Entscheide, ob f an der Stelle $(0,0)$ stetig ist.

b) Wie sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ an einer Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definiert?

c) Prüfe für das oben gegebene f, ob die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ an der Stelle $(0,0)$ existieren. Wenn ja, dann berechne sie.

(12 Punkte)

Aufgabe III-2. Sei $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\underline{F}(x,y) = (ax^2y - 3,\; x^3 - 2y + bx)$$

gegeben, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter sind.

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt $\underline{F}$ ein Potential auf $\mathbb{R}^2$?

b) Seien a, b wie in **a)** berechnet. Bestimme den Wert des Kurvenintegrals des Feldes $\underline{F}$ bezüglich der Kurve

$$\underline{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Es kann verwendet werden, dass $\underline{F}$ ein Potential besitzt.

c) Bestimme die Bogenlänge der Kurve

$$\underline{\gamma}_2(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t), \quad 0 \le t \le \sqrt{5}.$$

(12 Punkte)

Aufgabe III-3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme ein *reelles* Fundamentalsystem.

b) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung.

<u>Hinweis:</u> Es gibt eine Lösung $\underline{x}(t)$ der Form $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Finde diese Lösung.

(12 Punkte)

Aufgabe WR-1

Urne A enthalte zwei weiße und zwei schwarze Kugeln, Urne B drei weiße und zwei schwarze. Aus Urne A wird zufällig eine Kugel gezogen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus B zufällig eine Kugel gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die aus B gezogenene Kugel weiß ist?

b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die von A nach B transferierte Kugel weiß war unter der Bedingung, dass aus B eine weiße Kugel gezogen wird.

(12 Punkte)

Aufgabe WR-2

Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, X_2) besitze die Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_2} & \text{falls} \quad x_1 > 0 \text{ und } x_2 > x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = \sqrt{X_1 + X_2}$.

(12 Punkte)

Aufgabe WR-3

Die Verteilung der Zufallsvariablen X besitze die Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{4t^4}{3} e^{-2t} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = \dfrac{1}{X^2}$.

Beachten Sie, dass $Y = G(X)$ *mit* $G(x) = 1/x^2$.

(12 Punkte)