

# KLAUSUR MATHEMATIK III+IV FÜR INFORMATIKER

Gräf/Wieners

Erlangen, den 14.04.2004

**Aufgabe MatheIII-1** Es sei die Menge

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4, z > 0\}$$

gegeben, und  $F = \partial H$  sei die Randfläche von  $H$ . Es sei  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$I = \int_F \mathbf{f}^T \, d\mathbf{o}$$

mit Hilfe einer expliziten Parametrisierung von  $F$ . Wählen Sie die Parametrisierung so, dass das zugehörige Normalenfeld nach außen gerichtet ist.

b) Berechnen Sie nun  $I$  mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes.

(15 Punkte)

## Aufgabe MatheIII-2

a) Geben Sie ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem für das homogene Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

an.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$y' = Ay + b,$$

wobei

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gibt eine *konstante* partikuläre Lösung.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay + b, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

d) Geben Sie ein numerisches Verfahren zur Approximation der Anfangswertaufgabe aus c) an. Wählen Sie die Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.1$  und bestimmen Sie so einen Näherungswert für  $y(0.2)$ .

(15 Punkte)

**Aufgabe MatheIII-3** Es sei die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < 0\}$$

mit

$$g(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4$$

sowie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

gegeben.

- a) Untersuchen Sie, ob  $f$  auf der Menge  $M$  ein lokales Minimum und/oder ein lokales Maximum annimmt, und bestimmen Sie diese Extrema gegebenenfalls.
- b) Untersuchen Sie, ob  $f$  auf der abgeschlossenen Menge  $\overline{M}$  ein globales Minimum und/oder ein globales Maximum annimmt, und bestimmen Sie diese Extrema gegebenenfalls.

(15 Punkte)