LÖSUNGSVORSCHLAG
KLAUSUR MATHEMATIK III+IV FÜR INFORMATIKER,
Teil Mathe III

Gräf/Wieners

Erlangen, den 15.10.2003

Aufgabe MatheIII-1 Es sei durch

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \frac{y}{x^2}\begin{pmatrix} -y\sin z \\ 2x\sin z \\ xy\cos z \end{pmatrix}$$

auf $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x>0\}$ ein Vektorfeld definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{f}$ ein Potenzial $F:\Omega\to\mathbb{R}$ mit $\nabla F = \mathbf{f}$ besitzt.

b) Ist das Potenzial aus a) eindeutig?

c) Wählen Sie eine geeignete Kurve $\mathbf{c}$ in Ω von $(1,0,0)$ nach $(x,y,z)\in\Omega$ und berechnen Sie ein Potenzial mittels

$$F(x,y,z) := \int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\,d\mathbf{x} \qquad \text{(Kurvenintegral 2. Art).}$$

Hinweis: Wählen Sie einen (ggf. nur stückweise differenzierbaren) Integrationsweg so, dass das Integral leicht zu berechnen ist.

(15 Punkte)

Lösung.

a) (i) Ω ist einfach zusammenhängend, und (ii) rot $\mathbf{f}$ ist gleich null:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x}\cos z - \frac{2y}{x}\cos z \\ -\frac{y^2}{x^2}\cos z + \frac{y^2}{x^2}\cos z \\ -\frac{2y}{x^2}\sin z + \frac{2y}{x^2}\sin z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Nein. Das Potential ist nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

c) Sinnvoll ist es, eine stückweise achsenparallele Kurve $\mathbf{c}$ zu wählen; erst in x-, dann in y-, dann in z-Richtung:

$$\mathbf{c}(t) := \begin{cases} (1\pm t, 0, 0), & t\in[0, |1-x|] \\ (x, \pm|t-|1-x||, 0), & t\in[|1-x|, |1-x|+|y|] \\ (x, y, \pm|t-|1-x|-|y||), & t\in[|1-x|+|y|, |1-x|+|y|+|z|] \end{cases},$$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{cases} (\pm 1, 0, 0), & t\in[0, |1-x|] \\ (0, \pm 1, 0), & t\in[|1-x|, |1-x|+|y|] \\ (0, 0, \pm 1), & t\in[|1-x|+|y|, |1-x|+|y|+|z|] \end{cases}$$

Die Vorzeichen sind je nach Vorzeichen von $1-x, y, z$ zu wählen.
[Bemerkung: $\mathbf{c}$ ist hier parametrisiert nach der Bogenlänge. Es gilt $\mathbf{c}(0) = (1,0,0)$, $\mathbf{c}(|1-x|) = (x,0,0), \mathbf{c}(|1-x|+|y|) = (x,y,0), \mathbf{c}(|1-x|+|y|+|z|) = (x,y,z)$.]

$$F(x,y,z) = \int\limits_0^{|1-x|} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt + \int\limits_{|1-x|}^{|1-x|+|y|} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt + \int\limits_{|1-x|+|y|}^{|1-x|+|y|+|z|} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{|1-x|} \pm f_1(\mathbf{c}(t))\,dt + \int_{|1-x|}^{|1-x|+|y|} \pm f_2(\mathbf{c}(t))\,dt + \int_{|1-x|+|y|}^{|1-x|+|y|+|z|} \pm f_3(\mathbf{c}(t))\,dt$$

$$= 0 + 0 + \int_{|1-x|+|y|}^{|1-x|+|y|+|z|} \pm \frac{y^2}{x} \cos(\pm|t - |1-x| - |y||)\,dt = \int_0^{|z|} \pm \frac{y^2}{x} \cos t\;dt$$

$$= \int_0^{z} \frac{y^2}{x} \cos t\;dt = \frac{y^2}{x} \sin t\Big|_{t=0}^{t=z} = \frac{y^2}{x} \sin z$$

[Bemerkung: Beschränkte man sich auf den Fall $x > 1, y > 0, z > 0$, so hätte man die einfachere Rechnung

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_1^x \mathbf{f}(\xi,0,0)\cdot(1,0,0)^\top\,d\xi + \int_0^y \mathbf{f}(x,\eta,0)\cdot(0,1,0)^\top\,d\eta + \int_0^z \mathbf{f}(x,y,\rho)\cdot(0,0,1)^\top\,d\rho \\ &= \int_1^x f_1(\xi,0,0)\,d\xi + \int_0^y f_2(x,\eta,0)\,d\eta + \int_0^z f_3(x,y,\rho)\,d\rho \\ &= 0 + 0 + \int_0^z \frac{y^2}{x} \cos\rho\,d\rho = \frac{y^2}{x} \sin\rho\Big|_{\rho=0}^{\rho=z} = \frac{y^2}{x} \sin z \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man die geradlinige Verbindung zwischen Start- und Zielpunkt als Integrationsweg nimmt, sind die entstehenden Integrale schwer zu lösen.]

Aufgabe MatheIII-2

a) Geben Sie ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

an.

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung y_s von

$$y'' - 2y' + 2y = t.$$

Hinweis: Polynomansatz für y_s.

c) Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$y'' - 2y' + 2y = t \quad \text{in } [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$y(0) = \frac{3}{2}, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi+2}{4}.$$

d) Geben Sie ein numerisches Verfahren zur Approximation der Anfangswertaufgabe

$$y'' - 2y' + 2y = t, \quad t > 0,$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

an.

Hinweis: Schreiben Sie die Differentialgleichung als System erster Ordnung und wenden Sie darauf z.B. das explizite Euler-Verfahren an.

(15 Punkte)

Lösung.

a) Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 \overset{!}{=} 0$
$\iff \lambda_{1,2} = 1 \pm i$
$\Longrightarrow$ komplexes Fundamentalsystem

$$\{e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t}\}$$

Die beiden Fundamentallösungen lassen sich schreiben als

$$e^t(\cos t + i \sin t), \quad e^t(\cos t - i \sin t).$$

Summe sowie durch i geteilte Differenz ergeben die reellen Fundamentallösungen

$$e^t \cos t, \quad e^t \sin t.$$

b) Durch Probieren erkennt man, dass ein Ansatz als Polynom (Hinweis!) *ersten* Grades ausreicht:

$$y_s(t) = a + tb$$

Einsetzen von

$$y_s(t) = a + tb, \quad y_s'(t) = b, \quad y_s''(t) = 0$$

in die inhomogene Differenzialgleichung liefert

$$-2b + 2(a + tb) = t.$$

Koeffizientenvergleich bezüglich t liefert $a = b = \frac{1}{2}$, also

$$y_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$$

Bemerkung: Variation der Konstanten ist zwar theoretisch möglich; die Rechnung ist aber sehr langwierig.

c) Die allgemeine Lösung lautet (siehe a),b))

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t.$$

Einsetzen der Randbedingungen liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{1}{2} + c_1 \\ \frac{\pi + 2}{4} &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + c_2\, e^{\pi/2}. \end{aligned}$$

Lösung: $c_1 = 1, c_2 = 0$,
also

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + e^t \cos t.$$

d) Der Ansatz $u_1 := y,\ u_2 := y'$ liefert für $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$ (wie der Vorlesung entnommen oder leicht nachgerechnet werden kann) das System

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wählt man zur Diskretisierung z.B. das explizite Euler-Verfahren, so erhält man die Rechenvorschrift

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + (t_{k+1} - t_k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}_k(t) + (t_{k+1} - t_k) \begin{pmatrix} 0 \\ t_k \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{u}_k$ eine Approximation von $\mathbf{u}(t_k)$ darstellt.

Aufgabe MatheIII-3 Es sei die Ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) < 0\} \quad \text{mit} \quad g(x, y) := x^2 + 9y^2 - 25$$

und der Punkt $P = (8, 10) \in \mathbb{R}^2$ außerhalb von E gegeben. Sei f die Abstandsfunktion eines Punktes (x, y) von P

$$f(x, y) := \operatorname{dist}((x, y), P) := \sqrt{(x - 8)^2 + (y - 10)^2}.$$

a) Zeigen Sie: f nimmt auf der offenen Menge E kein Minimum an.
Hinweis: Warum genügt es, f^2 zu betrachten?

b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $Q = (4, 1)$ ein lokales Minimum auf dem Rand der Ellipse $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\}$ annimmt.
Hinweis: Betrachten Sie das zugehörige Lagrange-Funktional und berechnen Sie dessen Gradienten und Hesse-Matrix.

c) Zeigen Sie, dass $\overline{PQ}$ senkrecht auf der Kurve ∂E steht.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine beliebige Parametrisierung $\mathbf{c}$ von ∂E die Tangente $\dot{\mathbf{c}}$ orthogonal zu ∇g und damit zum Vektor $P - Q = (4, 9)$ ist. Skizze!

d) Sei $\mathbf{c}$ eine Parametrisierung von ∂E mit $\mathbf{c}(0) = Q$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{c})(0) = 0$$

und

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 (f \circ \mathbf{c})(0) = \left(\dot{\mathbf{c}}^\top (Hf \circ \mathbf{c})\, \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{c}}^\top (Hg \circ \mathbf{c})\, \dot{\mathbf{c}}\right)(0) > 0$$

(H =Hesse-Matrix). Also ist Q lokale Minimalstelle von f auf ∂E.
Hinweis: $\nabla g(Q) = -\nabla f(Q)$ und $\frac{d}{dt}(g \circ c) \equiv 0, \left(\frac{d}{dt}\right)^2 (g \circ c) \equiv 0$.

(15 Punkte)

Lösung.

a) Da $f > 0$ ist auf $\bar{E}$ und das Quadrieren positiver Zahlen eine ordnungserhaltende Operation ist, reicht es, f^2 zu betrachten.
Im folgenden schreiben wir daher kurz f statt f^2, also

$$f(x, y) := (x - 8)^2 + (y - 10)^2.$$

Suche nach kritischen Punkten von f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,(x-8) \\ 2\,(y-10) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \iff x=8,\; y=10$$

$(8,10) \notin E \Longrightarrow$ Es gibt keine kritischen Punkte, daher auch keine Minima in E.

b) Lagrange-Funktional:

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$$

$$\nabla L(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) + \lambda \nabla g(\vec{x}) = 2 \begin{pmatrix} x-8 \\ y-10 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ 9y \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Randpunktes $Q=(4,1)$:

$$\nabla L(4,1) = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Dies ist offensichtlich null für $\lambda = 1$.
Wir prüfen, ob L mit $\lambda = 1$ an der Stelle Q ein lokales Minimum hat, indem wir die Hesse-Matrix HL von L bestimmen:

$$HL(\vec{x}) = H(f)(\vec{x}) + 1 \cdot Hg(\vec{x}) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

HL ist also für beliebiges $\vec{x} \in \partial E$, also insbesondere für $\vec{x} = (4,1)$, positiv definit. Nach (4.5) b) der Vorlesungsfolien hat L daher in $(4,1)$ ein Minimum. Nach (4.23) der Folien hat dann f unter der Nebenbedingung $g=0$ ein Minimum an der Stelle $(4,1)$.

c) Sei $\mathbf{c}$ eine beliebige Parametrisierung der Randkurve ∂E mit $\mathbf{c}(0) = Q$. Nach Definition von $\mathbf{c}$ und ∂E ist offensichtlich

$$g(\mathbf{c}(t)) = 0 \quad \forall t.$$

Ableiten liefert

$$\nabla g(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = 0 \quad \forall t. \quad (1)$$

Also ist ∇g orthogonal zum Tangentialvektor $\dot{\mathbf{c}}$ auf ganz ∂E, insbesondere an der Stelle $Q = \mathbf{c}(0)$.
An der Stelle $Q = \mathbf{c}(0)$ gilt ferner $\nabla g(Q) = (8,18) = 2\,(P-Q)$. Also ist der Tangentialvektor $\dot{\mathbf{c}}$ an der Stelle Q auch orthogonal zu $P-Q$.

d) Ableiten von $f \circ \mathbf{c}$ liefert

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t). \quad (2)$$

An der Stelle $Q = \mathbf{c}(0)$ gilt die Lagrange-Identität mit $\lambda = 1$ (siehe b)):

$$\nabla f(Q) = -\nabla g(Q), \quad \text{also} \quad \nabla f(\mathbf{c}(0)) = -\nabla g(\mathbf{c}(0)) \quad (3)$$

Aus (1),(2),(3) folgt

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(0)) = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(0) = -\nabla g(\mathbf{c}(0)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(0) = 0.$$

Die zweiten Ableitungen der Funktion $f \circ \mathbf{c}$ und der Gleichung $g \circ \mathbf{c} \equiv 0$ ergeben

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 f(\mathbf{c}(t)) &= \left(\dot{\mathbf{c}}^\top Hf(\mathbf{c})\,\dot{\mathbf{c}} + \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \ddot{\mathbf{c}}\right)(t), \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 g(\mathbf{c}(t)) &= \left(\dot{\mathbf{c}}^\top Hg(\mathbf{c})\,\dot{\mathbf{c}} + \nabla g(\mathbf{c}) \cdot \ddot{\mathbf{c}}\right)(t) = 0. \end{aligned}$$

Beide Gleichungen an der Stelle $t = 0$ sowie die Lagrange-Identität (3) ergeben

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^2 f(\mathbf{c}(0)) &= \left(\dot{\mathbf{c}}^\top Hf(\mathbf{c})\,\dot{\mathbf{c}} + \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \ddot{\mathbf{c}}\right)(0) \\
&= \left(\dot{\mathbf{c}}^\top Hf(\mathbf{c})\,\dot{\mathbf{c}} - \nabla g(\mathbf{c}) \cdot \ddot{\mathbf{c}}\right)(0) \\
&= \left(\dot{\mathbf{c}}^\top Hf(\mathbf{c})\,\dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{c}}^\top Hg(\mathbf{c})\,\dot{\mathbf{c}}\right)(0)
\end{aligned}
$$

Da Hf und Hg (s.o.) positiv definite Matrizen sind und $\dot{\mathbf{c}} \neq \mathbf{0}$ für glatte Kurven $\mathbf{c}$ folgt die Positivität des Ausdrucks.

Aufgabe WR-1 Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der diskreten Verteilung mit der erzeugenden Funktion

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{(2-z)^2}$$

(15 Punkte)

Aufgabe WR-2 Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, X_2) besitze die Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 e^{-x_1(1+x_2)} & \text{falls} \quad x_1 > 0 \quad \text{und} \quad x_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen $Y = X_1 + X_2$.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-3 Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. Die Verteilung von X_1 besitze die Dichte

$$f_1(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

und X_2 sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda = 2$.
Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $Y_1 = 3X_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1 + X_2$.

(15 Punkte)

Summe: 90 Punkte