Universität Erlangen-Nürnberg, Institut für Angewandte Mathematik

DIPLOMVORPRÜFUNG (2. Teil, INF)

Mathematik für Ingenieure III + WR I, 28.09.2007, 8:00–10:00 Uhr

Dr. S. Kräutle, Dr. F. Graef

***** LÖSUNGSVORSCHLÄGE DES MATHE-III-TEILS *****

Aufgabe 1 **($2 + 8 + 1 = 11$ Punkte)**

Gesucht sind das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = 12y - x^3$$

unter der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

a) Warum existieren dieses Maximum und Minimum? (keine Rechnung!)

b) Berechnen Sie Maximum und Minimum unter Verwendung des Lagrange-Formalismus.

c) Untersuchen Sie, ob f unter der Ungleichheits-Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{4} + y^2 < 1$$

Extremwerte annimmt.

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktion f ist stetig, und der durch die Nebenbedingung beschriebene Bereich ist kompakt. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Min./Max. an.

b) Wir setzen $g(x, y) := \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$. Notwendiges Kriterium für Extremalstellen ist $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$[1], also:

$$\begin{array}{llcl} \text{(I)} & -3x^2 & = & \frac{1}{2}\lambda x \\ \text{(II)} & 12 & = & 2\lambda y \\ \text{(III)} & \frac{1}{4}x^2 + y^2 & = & 1 \end{array}$$

Es gibt verschiedene Varianten, das Gleichungssystem zu lösen.

<u>Variante 1:</u> Gleichung (I) faktorisieren: $x\,(6x+\lambda) = 0$, also $x = 0 \vee \lambda = -6x$.

Im Fall $x = 0$ folgt mit (III): $y = \pm 1$; es sind also $(0, \pm 1)$ kritische Punkte.

Im Fall $\lambda = -6x$ liefert (II) die λ-freie Gleichung $1 = -xy$. Dies benutzt man in der ebenfalls λ-freien Gleichung (III), um entweder x oder y zu eliminieren. Wir eliminieren $x = -\frac{1}{y}$ in (III):

$$\frac{1}{4y^2} + y^2 - 1 = 0 \quad | \cdot y^2$$

$$\Leftrightarrow y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

also $x = -\frac{1}{y} = \mp\sqrt{2}$. Weitere kritische Punkte sind also $(\mp\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Man evaluiert f an den kritischen Stellen:

$$\begin{array}{l} f(0, \pm 1) = \pm 12, \\ f(\mp\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{12}{\sqrt{2}} \pm 2\sqrt{2} = \pm 8\sqrt{2} \end{array}$$

[1] Wahlweise auch $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$.

Auch ohne Taschenrechner ist klar: Max. $= 12$, Min. $= -12$ (da $\sqrt{2} < 1.5$).
Variante 2: Aus (II) sieht man, dass $y \neq 0$ ist. Also kann man bedenkenlos (II) schreiben als $\lambda = \frac{6}{y}$. Dies in (I) eingesetzt ergibt $-3x^2 = 3\frac{x}{y}$; faktorisiert $x(x + \frac{1}{y}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{y}$. Diese beiden Fälle behandelt man wie in Variante 1.
Variante 3: Man kann, wie Herr Hofmann es in der Übung vorgeführt hat, statt des Gleichungssystems (I)-(III) die lineare Abhängigkeit von ∇f und ∇g mittels Determinantenkriterium[2] prüfen. Man löst also

$$\det(\nabla f \mid \nabla g) = \det \begin{pmatrix} -3x^2 & \frac{x}{2} \\ 12 & 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

zusammen mit (III).

$$\Leftrightarrow -6x^2y - 6x = 0 \Leftrightarrow 6x\,(xy - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee xy = -1$$

Diese beiden Fälle können wie in Variante 1 durchgerechnet werden.
c) Die Nebenbedingung beschreibt eine *offene* Menge (d.h. potenzielle Extremalstellen liegen *im Inneren* der Menge). Notwendiges Kriterium für Extremalsstellen im Inneren des Gebietes ist: $\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0$. Insbesondere $12 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ es gibt keine Extrema.

[2]Diese lineare Abhängigkeit ist ebenfalls ein notwendiges Kriterium für Extremalstellen.

Aufgabe 2 **(2 + 4 + 2 + 4 = 12 Punkte)**

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (y-1-x)\,e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{V}$ ein Potential besitzt.

b) Berechnen Sie ein zu $\mathbf{V}$ gehörendes Potential.

c) Bestimmen Sie (möglichst einfach) den Wert des Kurvenintegrals

$$I = \int_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

wobei Γ die Kurve

$$\mathbf{x} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ist.

d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\mathbf{x} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t^{3/2} - t \\ \frac{2}{3}t^{3/2} + t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Lösungsvorschlag:

a) Hinreichendes Kriterium ist, dass die Jacobi-Matrix von $\mathbf{V}$ symmetrisch ist und der Definitionsbereich von $\mathbf{V}$ einfach zusammenhängend ist (Die Symmetrie kann man auch mit Hilfe der Rotation ausdrücken, was allerdings eher im $\mathbb{R}^3$ als im $\mathbb{R}^2$ gebräuchlich ist).

Es ist

$$\frac{\partial \mathbf{V_1}}{\partial y} = e^x = \frac{\partial \mathbf{V_2}}{\partial x},$$

und der $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend.

b) Es gibt verschiedene Varianten:

Variante 1: durch "Aufintegrieren":

Das Potential p soll $\nabla p = \mathbf{V}$, also

$$\partial_x p(x,y) = (y-1-x)\,e^x, \quad \partial_y p(x,y) = e^x$$

erfüllen.

$$\Rightarrow p(x,y) = \int (y-1-x)\,e^x\,dx = (y-1-x)\,e^x - \int (-1)\,e^x\,dx = (y-x)\,e^x + c(y)$$

Dies nach y ableiten:

$$\partial_y p(x,y) = e^x + c'(y) \stackrel{!}{=} e^x \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = \text{const}$$

Wählt man die Konstante gleich null, so ist also z.B.

$$p(x,y) = (y-x)\,e^x$$

ein Potential von $\mathbf{V}$.

(An dieser Stelle kann man sinnvollerweise eine *Probe* machen.)

Variante 2: Durch ein Kurvenintegral:

Man wählt eine "einfache" Kurve von einem "festen" Punkt, z.B. $(0,0)$, zum Punkt (x,y). Als Kurve wähle ich $\gamma(t) = (tx, ty)$, $t \in [0,1]$. Es ist

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= \int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \mathbf{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} (ty-1-tx)\, e^{tx} \\ e^{tx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt = \int_0^1 [t(xy-x^2)+y-x]\, e^{tx}\, dt \\
&= t(y-x)\, e^{tx} \Big|_0^1 = (y-x)\, e^x
\end{aligned}
$$

<u>Variante 3 (kann man ebenfalls als Kurvenintegral, und zwar über eine stückweise achsenparallelel Kurve, auffassen):</u>

$$
p(x,y) = \int_0^x \mathbf{V}_1(\xi,0)\, d\xi + \int_0^y \mathbf{V}_2(x,\eta)\, d\eta = -\int_0^x (1+\xi)\, e^\xi\, d\xi + \int_0^y e^x\, d\eta = -x\, e^x + y\, e^x
$$

c) Da es ein Potential gibt, kann man den Wert eines jeden Kurvenintegrals als "Wert des Potentials am Endpunkt minus Wert des Potentials am Anfangspunkt der Kurve" berechnen:

$$
I = p(\gamma(1)) - p(\gamma(0)) = p(-1,1) - p(0,0) = 2e^{-1} - 0 = \frac{2}{e}.
$$

Fertig.
Wer dies nicht weiß, muss das Kurvenintegral "zu Fuß" ausrechnen als

$$
I = \int_0^1 \begin{pmatrix} (t^2-1+t)\, e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2t \end{pmatrix} dt.
$$

Oder, man kann, das es ein Potenzial gibt, den Kurvenverlauf vereinfachen (unter Beibehaltung von Anfangs- und Endpunkt der Kurve, z.b. $\tilde{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$, was

$$
I = \int_0^1 \begin{pmatrix} (t-1+t)\, e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt
$$

ergibt und das partialle Integrieren etwas erleichtert.
d) Es ist

$$
\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t}-1 \\ \sqrt{t}+1 \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\sqrt{t}-1)^2 + (\sqrt{t}+1)^2} = \sqrt{2t+2}.
$$

Die Bogenlänge ist

$$
\int_0^3 \|\gamma'(t)\|\, dt = \sqrt{2} \int_0^3 (t+1)^{1/2}\, dt = \sqrt{2}\frac{2}{3}(t+1)^{3/2} \Big|_0^3 = \sqrt{2}\frac{2}{3}(4^{3/2}-1) = \sqrt{2}\frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}\sqrt{2}
$$

Aufgabe 3	**(5 + 8 = 13 Punkte)**

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'' = (y')^2\, t^2, \quad y(1) = \frac{5}{2}, \quad y'(1) = -3.$$

Hinweis: Substituieren Sie so, dass das gegebene skalare AWP zweiter Ordnung in ein skalares AWP erster Ordnung überführt wird, lösen Sie dieses.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:
a) Substitution $u := y'$

$$\Rightarrow u' = u^2 t^2, \quad u(1) = -3.$$

Dieses AWP löst man mittels "Trennung der Variablen":

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t^2\, dt \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{3} t^3 + c \Leftrightarrow u = -\frac{1}{\frac{1}{3}t^3 + c}$$

Mit der Anfangsbedingung $t = 1, u = -3$ folgt $c = 0$, also

$$u(t) = -3\, t^{-3}.$$

Integration liefert

$$y(t) = \int u(\tau)\, d\tau = \frac{3}{2}\, t^{-2} + c$$

Die Anfangsbedingung $t = 1, y = \frac{5}{2}$ liefert $c = 1$. Also:

$$y(t) = \frac{3}{2t^2} + 1$$

b) Erster Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & 1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{pmatrix} (3 - \lambda)$$

Dies erfolgte mittels "Entwicklung nach der dritten Zeile"! Sowas lernt man schon in der Schule, Nullen auszunutzen! Wer alles ausmultipliziert, somit ein Polynom dritten Grades bekommt, anschließend Nullstellen rät, um das Polynom wieder zu faktorisieren, vergeudet völlig sinnlos viel Zeit! Man bekommt

$$p(\lambda) = [(7 - \lambda)(5 - \lambda) + 1]\, (3 - \lambda) = (\lambda^2 - 12\lambda + 36)\, (3 - \lambda)$$

Der erste Faktor hat eine doppelte Nullstelle bei 6. Man hat also den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit einfacher Vielfachheit und den Eigenwert $\lambda_2 = 6$ mit doppelter Vielfachheit.
Schritt 2: Berechnung der Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}(3) = \mathrm{Kern}(A - 3I):$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A - 6I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Der Eigenraum ist nur eindimensional, wohingegen die zugehörige algebraische Vielfachheit des Eigenwertes zwei ist. Also muss noch ("Schritt 3") ein Hauptvektor v_3 gesucht werden, und zwar als Lösung von $(A - 6I)v_3 = v_2$:

$$A - 6I = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Eine Lösung ist z.B. $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Diese ist aber nicht eindeutig; jeder Vektor der Form $v_3 + \alpha v_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist ebenfalls ein zulässiger Hauptvektor.

Letzter Schritt: Ein Fundamentalsystem lautet

$$\{v_1\, e^{\lambda_1 t}, v_2\, e^{\lambda_2 t}, (v_3 + t v_2)\, e^{\lambda_2 t}\}$$

also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{6t}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{6t} \right\}$$

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der diskreten Verteilung mit der erzeugenden Funktion

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{4 - 3z^2}$$

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. X_1 sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda = 1$ und die Verteilung von X_2 besitze die Verteilungsfunktion $F(t)$ mit $F(t) = 0$ für $t \leq 0$ und

$$F(t) = 1 - e^{-t^2}$$

für $t > 0$.
Berechnen Sie die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen

$$Y = \frac{X_1}{X_2^2}$$

Hinweis: Bei direkter Anwendung des Transformationssatzes empfiehlt sich die Ergänzung $y_2 = x_2^2$

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Der Zufallsvektor (X_1, X_2, X_3) sei normalverteilt mit $\mathcal{E}X_1 = \mathcal{E}X_2 = \mathcal{E}X_3 = 0$ und der Kovarianzmatrix

$$\mathcal{C}_X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und λ eine reelle Zahl.
Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Zufallsvariablen $U = X_1 + \lambda X_2$ und $V = X_1 - \lambda X_3$.
Gibt es einen Wert von λ, für den U und V stochastisch unabhängig sind?