KLAUSUR MATHEMATIK III+IV FÜR INFORMATIKER

Gräf/Wieners

Erlangen, den 15.10.2003

Aufgabe MatheIII-1 Es sei durch

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{y}{x^2} \begin{pmatrix} -y \sin z \\ 2x \sin z \\ xy \cos z \end{pmatrix}$$

auf $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0\}$ ein Vektorfeld definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{f}$ ein Potenzial $F : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\nabla F = \mathbf{f}$ besitzt.

b) Ist das Potenzial aus a) eindeutig?

c) Wählen Sie eine geeignete Kurve $\mathbf{c}$ in Ω von $(1, 0, 0)$ nach $(x, y, z) \in \Omega$ und berechnen Sie ein Potenzial mittels

$$F(x, y, z) := \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\mathbf{x} \qquad \text{(Kurvenintegral 2. Art).}$$

Hinweis: Wählen Sie einen (ggf. nur stückweise differenzierbaren) Integrationsweg so, dass das Integral leicht zu berechnen ist.

(15 Punkte)

Aufgabe MatheIII-2

a) Geben Sie ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

an.

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung y_s von

$$y'' - 2y' + 2y = t.$$

Hinweis: Polynomansatz für y_s.

c) Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$y'' - 2y' + 2y = t \quad \text{in } [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$y(0) = \frac{3}{2}, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi + 2}{4}.$$

d) Geben Sie ein numerisches Verfahren zur Approximation der Anfangswertaufgabe

$$y'' - 2y' + 2y = t, \quad t > 0,$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

an.
Hinweis: Schreiben Sie die Differentialgleichung als System erster Ordnung und wenden Sie darauf z.B. das explizite Euler-Verfahren an.

(15 Punkte)

Aufgabe MatheIII-3 Es sei die Ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < 0\} \quad \text{mit} \quad g(x, y) := x^2 + 9y^2 - 25$$

und der Punkt $P = (8, 10) \in \mathbb{R}^2$ außerhalb von E gegeben. Sei f die Abstandsfunktion eines Punktes (x, y) von P

$$f(x, y) := \operatorname{dist}((x, y), P) := \sqrt{(x-8)^2 + (y-10)^2}.$$

a) Zeigen Sie: f nimmt auf der offenen Menge E kein Minimum an.
Hinweis: Warum genügt es, f^2 zu betrachten?

b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $Q = (4, 1)$ ein lokales Minimum auf dem Rand der Ellipse $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = 0\}$ annimmt.
Hinweis: Betrachten Sie das zugehörige Lagrange-Funktional und berechnen Sie dessen Gradienten und Hesse-Matrix.

c) Zeigen Sie, dass $\overline{PQ}$ senkrecht auf der Kurve ∂E steht.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine beliebige Parametrisierung $\mathbf{c}$ von ∂E die Tangente $\dot{\mathbf{c}}$ orthogonal zu ∇g und damit zum Vektor $P - Q = (4, 9)$ ist. Skizze!

d) Sei $\mathbf{c}$ eine Parametrisierung von ∂E mit $\mathbf{c}(0) = Q$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{c})(0) = 0$$

und

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 (f \circ \mathbf{c})(0) = \left(\dot{\mathbf{c}}^\top (Hf \circ \mathbf{c})\, \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{c}}^\top (Hg \circ \mathbf{c})\, \dot{\mathbf{c}}\right)(0) > 0$$

(H =Hesse-Matrix). Also ist Q lokale Minimalstelle von f auf ∂E.
Hinweis: $\nabla g(Q) = -\nabla f(Q)$ und $\frac{d}{dt}(g \circ c) \equiv 0$, $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 (g \circ c) \equiv 0$.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-1 Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der diskreten Verteilung mit der erzeugenden Funktion

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{(2-z)^2}$$

(15 Punkte)

Aufgabe WR-2 Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, X_2) besitze die Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 e^{-x_1(1+x_2)} & \text{falls} \quad x_1 > 0 \quad \text{und} \quad x_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte der Verteilung der Zufallsvariablen $Y = X_1 + X_2$.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-3 Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig. Die Verteilung von X_1 besitze die Dichte

$$f_1(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2} & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \le 0 \end{cases}$$

und X_2 sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda = 2$.
Berechnen Sie die Kovarianz der Zufallsvariablen $Y_1 = 3X_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1 + X_2$.

(15 Punkte)

Summe: 90 Punkte

Achtung: Tutoren gesucht!