

KLAUSUR
MATHEMATIK III UND STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER

Strauß/Graef
Erlangen, den 04.10.2006
Bearbeitungszeit: 120 min

Aufgabe III-1. Berechnen Sie mit dem Lagrange-Formalismus die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + y^2 - 2y$$

unter der Nebenbedingung

$$2x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

(12 Punkte)

Aufgabe III-2. Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2y + z^2 \\ x^3 + 6y \\ 2xz \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass \mathbf{V} wirbelfrei ist.
- b) Berechnen Sie ein zu \mathbf{V} gehörendes Potenzial.
- c) Gegeben sei das Kurvenintegral

$$I = \int_K \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

mit der Kurve K :

$$\mathbf{x} = \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Berechnen Sie den Integralwert I

- (i) unter Verwendung des Potenzials,
- (ii) ohne Verwendung des Potenzials.

(12 Punkte)

Aufgabe III-3.

- a) Bestimmen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für die Differenzialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

b) Gegeben sei das Differenzialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.

(12 Punkte)

Aufgabe WR-1. Aus einer Urne, die drei weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, werden zufällig zwei Kugeln entnommen und in eine zweite Urne gelegt, in der sich zuvor bereits vier weiße und vier schwarze Kugeln befanden. Anschließend wird aus der zweiten Urne zufällig eine Kugel gezogen.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die aus der zweiten Urne gezogene Kugel weiß ist?
- b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die aus der ersten Urne gezogenen Kugeln beide schwarz waren unter der Bedingung, dass anschließend aus der zweiten eine weiße Kugel gezogen wird.

(12 Punkte)

Aufgabe WR-2. Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und beide exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda=2$.

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}(S^3)$ für die Zufallsvariable $S = X + Y$.

(12 Punkte)

Aufgabe WR-3. Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, X_2) besitze die Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 8x_2(x_2 - x_1) & \text{für } 0 < x_2 < 1 \text{ und } 0 < x_1 < x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = X_2 - X_1$.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(Y > 1)$.

(12 Punkte)

Viel Erfolg!

Summe: 72 Punkte