KLAUSUR
MATHEMATIK III UND STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER

Kurzweil/Graef
Erlangen, den 05.10.2005
Bearbeitungszeit: 120 min

Aufgabe III-1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\,(x^2 - y^2)\; e^{-x^2 - y^2}$$

gegeben.

a) Bestimme die Richtung des steilsten Abstiegs $\underline{r} \in \mathbb{R}^2$ (mit $\|\underline{r}\| = 1$) von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$.

b) Bestimme die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \underline{r}}$ mit $\underline{r}$ aus a) an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$.

c) Bestimme die Tangentialebene $E \subset \mathbb{R}^3$ an den Graphen der Funktion f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$.

(15 Punkte)

Aufgabe III-2.

a) Gegeben sei die Funktion F und die Kurve $\gamma_1 : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + 2y^2}, \frac{2y}{x^2 + 2y^2} \right), \qquad \gamma_1(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t).$$

(i) Zeige, dass F ein Potential hat auf dem Gebiet $D_F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$.

(ii) Was ist der Wert des Kurvenintegrals $\int\limits_{\gamma_1} F\, d\underline{s}$ über dem Kreis γ_1 ?

b) Gegeben sei die Funktion G und die Kurve $\gamma_2 : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(x,y) = \left(\frac{-\sqrt{2}\,y}{x^2 + 2y^2}, \frac{1 + \sqrt{2}\,x}{x^2 + 2y^2} \right), \qquad \gamma_2(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sin t).$$

(i) Berechne den Wert des Kurvenintegrals $\int\limits_{\gamma_2} G\, d\underline{s}$ über der Ellipse γ_2.

(ii) Hat G ein Potential auf $D_G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x} \neq \underline{0}\}$?

(15 Punkte)

Aufgabe III-3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems.

b) Bestimme eine Lösung $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der inhomogenen Differentialgleichung, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ *konstant*, d.h. unabhängig von t, sind.

c) Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

d) Bestimme die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zum Anfangswert $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-1.
Ein Würfel, bei dem die Augenzahl Sechs mit Wahrscheinlichkeit p auftritt, wird mehrmals geworfen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint beim n-ten Wurf zum genau dritten Mal die Augenzahl Sechs?
b) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Würfe bis zum dritten Auftreten der Augenzahl Sechs.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-2.
Die Verteilung des Zufallsvektors (X_1, X_2) besitze die Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-(2x_1+x_2)} & \text{falls} \quad x_1 > 0 \quad \text{und} \quad x_2 > x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und es sei $Y = X_1/X_2$.
a) Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen Y.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(Y > 1/2)$.

(15 Punkte)

Aufgabe WR-3.
(X_1, X_2) sei ein normalverteilter Zufallsvektor mit $\mathcal{E}X_1 = \mathcal{E}X_2 = 0$ und der Kovarianzmatrix

$$\mathcal{C}_X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

und es sei $Y_1 = aX_1 - X_2$ und $Y_2 = X_1 + 2X_2$.
Für welche Werte des Parameters a sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?

(15 Punkte)

Summe: 90 Punkte