Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2014**

Lösungsvorschlag **Prof. Dr. S. Kräutle**

Freitag, 26.09.2014 **Dauer: 90 min**

Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung.
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Grenzwerte, Folgen, Reihen)

a) Berechnen Sie den folgenden Folgengrenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{e^n+1} - \sqrt{e^n-1}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Funktionengrenzwerte:

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{x\,\sin x}{e^{-2x}-1+2x} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+(\sin x)^2}{x^2}$$

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(4\sqrt[k]{\frac{3}{k}} + \frac{2}{\sqrt[k]{k!}}\right)^k x^k, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\cos\frac{1}{k}\right)^{-k} x^k$$

(3 + 3+3 + 3+2 = 14 Punkte)

Lösung:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{e^n+1} - \sqrt{e^n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{e^n+1}-\sqrt{e^n-1})(\sqrt{e^n+1}+\sqrt{e^n-1})}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{e^n+1}+\sqrt{e^n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(e^n+1)-(e^n-1)}{\sqrt{e^n+1}+\sqrt{e^n-1}} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\sqrt{e^n+1}}_{\to+\infty}+\underbrace{\sqrt{e^n-1}}_{\to+\infty}} = 0$

b) (i) Zweimal de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x\,\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{e^{-2x}-1}_{\to 0}+\underbrace{2x}_{\to 0}} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}+\overbrace{x\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{-2\,e^{-2x}+2}_{\to 0}}$$
$$\overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x+\cos x - x\sin x}{4\,e^{-2x}} = \frac{1+1-0}{4} = \frac{1}{2}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+(\sin x)^2}{x^2} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\text{Subst. } y:=x^2\to 0} + \lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2 = 1+1 = 2$ nach Vorlesung

<u>Alternative:</u> Zweimal de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+(\sin x)^2}{x^2} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)+2\sin x\cos x}{2x}$$
$$\overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)+2\cos^2 x-2\sin^2 x}{2} = \frac{2-0+2-0}{2}$$
$$= 2$$

c) Sei a_k jeweils das k-te Reihenglied.

(i) $\limsup\limits_{k} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup\limits_{k} 4\sqrt[k]{\frac{3}{k}} + \frac{2}{\sqrt[k]{k!}} = 4\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{3}}{\sqrt[k]{k}} + \lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{\sqrt[k]{k!}} = 4\cdot\frac{1}{1} +$
$0 = 4$
$\Rightarrow\ R = \frac{1}{4}$

(ii) $\limsup\limits_{k} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup\limits_{k} (1+\underbrace{\cos\overbrace{\frac{1}{k}}^{\to 0}}_{\to\cos 0=1})^{-1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ R = 2$

A2) (Ableitung und Stammfunktion)

a) Prüfen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x^2)}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist. Falls ja, geben Sie $f'(0)$ an.

b) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion:

$$\text{(i)} \quad \int (3{+}6x)\, e^{3x}\, dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int 2x^3\, e^{-x^4}\, dx$$

<u>Bemerkung:</u> Es ist *nicht* gestattet, das Ergebnis ohne Rechnung z.B. einer Formelsammlung zu entnehmen.

(2 + 3+2 = 7 Punkte)

Lösung:

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{\ln(h^2)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\ln(h^2)} = 0$, denn der Nenner geht gegen $-\infty$.
Also: $f'(0)$ existiert und ist $= 0$.

b) (i) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(3{+}6x)}_{\text{abl.}}\, \underbrace{e^{3x}}_{\text{int.}}\, dx &= (3{+}6x)\cdot \frac{1}{3}\, e^{3x} - \int \frac{6}{3}\, e^{3x}\, dx \\ &= \underbrace{(1{+}2x)\, e^{3x} - \frac{2}{3}\, e^{3x}}_{(*)} \overset{(**)}{=} (\frac{1}{3} + 2x)\, e^{3x} \end{aligned}$$

An die Tutoren: Das Ergebnis in der Form (*) o.ä. wird auch schon als korrekt anerkannt, d.h. wer sich im letzten Schritt (**) verrechnet, bekommt keinen Punktabzug.

(ii) Mit Substitution $y := x^4$, also $\frac{dy}{dx} = 4x^3$, also $dy = dx \cdot 4x^3$:

$$\begin{aligned} \int 2x^3\, e^{-x^4}\, dx &= \frac{1}{2} \int e^{-y}\, dy = -\frac{1}{2}\, e^{-y} \\ &= -\frac{1}{2}\, e^{-x^4} \end{aligned}$$

(Bemerkung: Man hätte genau so gut $y := -x^4$ substituieren können.)

A3) (Taylor-Entwicklung)
Sei
$$f(x) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \sin x \cos 2x\,.$$

a) (i) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = \frac{\pi}{2}$ das Taylor-Polynom T_1 ersten Grades auf.

(ii) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_1 aus (i) das Restglied R_1 an.

(iii) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_1 an der Stelle $x = x_* + \frac{1}{10}$.

<u>Hinweis/zur Kontrolle</u>: f'' hat die Form
$f''(x) = \alpha \sin x \cos 2x + \beta \cos x \sin 2x\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei unendlich oft differenzierbar. Ferner sei bekannt, dass $|g^{(n)}(x)| \leq n|x|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Folgt daraus, dass die Taylor-Reihe von g zum Entwicklungspunkt $x_* = 0$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ gegen g konvergiert? (Begründung/Rechnung!)

(4+4+3 + 3 = 14 Punkte)

Lösung:

a) Vorab:
$\sin \frac{\pi}{2} = 1\,,\ \sin \pi = 0$
$\cos \frac{\pi}{2} = 0\,,\ \cos \pi = -1$

(i) $f'(x) = \frac{2}{\pi} + \cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x$
$f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi/2}{\pi/2} + 1 \cdot (-1) = 1$
$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} + 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{2}{\pi}$
Ergebnis: $T_1(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot (x - \frac{\pi}{2})$

(ii) $f''(x) = -\sin x \cos 2x - 2 \cos x \sin 2x - 2 \cos x \sin 2x - 4 \sin x \cos 2x = -5 \sin x \cos 2x - 4 \cos x \sin 2x$
$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) \cdot (x - \frac{\pi}{2})^2 = -\frac{1}{2}\,(5 \sin \xi \cos 2\xi + 4 \cos \xi \sin 2\xi) \cdot (x - \frac{\pi}{2})^2$
wobei ξ zwischen x und $\frac{\pi}{2}$

(iii) Für $x = x_* + \frac{1}{10}$ bekommt man
$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{9}{200}$ (= 0.045)

<u>Bemerkung</u>: Wer (ii) nicht lösen konnte, kann den Hinweis verwenden und bekommt $|R_1(x)| \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{200}$.

Bemerkung: Wenn man nicht $|R_n|$, sondern R_n betrachtet, dann muss man separat nach einer oberen und einer unteren Schranke suchen.

Bemerkung: Wenn man sich mehr anstrengt, kann man auch noch bessere (d.h. kleinere) Schranken finden: Man erkennt, dass $\cos x_*$ und $\sin 2x_*$ gleich null sind, und da ξ sehr nahe bei x_* liegt, sind $|\cos\xi|$ und $|\sin 2\xi|$ erheblich kleiner als 1, und zwar kann man sich überlegen, dass $|\cos\xi| \leq \frac{1}{10}$ und $|\sin 2\xi| \leq \frac{2}{10}$. Somit bekommt man die bessere Abschätzung $|R_1(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10}) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{508}{20000} (= 0.0256)$.
Eine soclh feine Abschätzung war aber nicht verlangt/erwartet worden.

b) Für die Konvergenz der Taylor-Reihe gegen die Funktion ist (notwendig und) hinreichend, dass das Restglied gegen null geht: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \,\forall\, x \in [-1, 1]$.
Wir prüfen, ob dieses Kriterium erfüllt ist:

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{|g^{(n+1)}(x)|}_{\leq (n+1)|\xi_n|} |x - \underbrace{x_*}_{=0}|^{(n+1)} \leq \frac{(n+1)\overbrace{|\xi_n|}^{\leq |x| \leq 1}}{(n+1)!} \underbrace{|x|}_{\leq 1}{}^{n+1} \leq \frac{1}{n!} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Also konvergiert die Taylor-Reihe auf $[-1, 1]$ gegen die Funktion.

Bem.: Anstelle von R_n kann man genau so gut R_{n-1} betrachten, dann hat man etwas weniger zu schreiben (überall $n+1$ durch n ersetzen)

Bem.: Einige haben nicht das Restglied untersucht, sondern stattdessen gezeigt, dass die Taylor-Reihe unter den angegebenen Bedingungen konvergiert. Das beantwortet aber nicht die Frage, nämlich, ob das Taylor-Polynom gegen g konvergiert. Einigen ist dabei klar geworden, dass unter den angebgebenen Bedingungen die Glieder der Taylor-Reihe allesamt null sind. Aber das beantwortet die Frage auch nicht, da man zunächst einmal nicht weiß, ob g die Nullfunktion ist.

Bem.: Man kann sogar zeigen, dass diese Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ gilt.

A4) (Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$: Stetigkeit, Richtungsableitung)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy + y^3}{x^2+y^2} & , \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig ist.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = e^{xy} - e^{x^2}\,.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{r}}$ von g an der Stelle $(x,y) = (2,2)$ zum Richtungsvektor $\vec{r} = (-1,1)$.

$(3 + 3 = 6$ Punkte$)$

Lösung:

a) Entlang der Koordinatenachsen funktioniert es nicht
$[\ f(x,0) = x^3/x^2 = x \overset{(x\to 0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)\ ]$,
wohl aber entlang von Diagonalen:
Z.B..
$$f(x,-x) = \frac{x^3 - x^2 - x^3}{x^2 + x^2} = -\frac{x^2}{2x^2} = -\tfrac{1}{2} \text{ für alle } x \neq 0.$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x) = -\tfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

<u>oder</u>

$$f(x,x) = \frac{x^3 + x^2 + x^3}{x^2 + x^2} = \frac{2x^3 + x^2}{2x^2} = x + \tfrac{1}{2} \text{ für alle } x \neq 0.$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} x + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$
$\Rightarrow$ f ist unstetig an der Stelle $(0,0)$.

<u>Bem.</u>: Es gibt noch andere geeignete Wege, die zu Grenzwerten $\neq f(0,0)$ führen.

b) $$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} y\,e^{xy} - 2x\,e^{x^2} \\ x\,e^{xy} \end{pmatrix}$$
$$\nabla g(2,2) = \begin{pmatrix} -2\,e^4 \\ 2\,e^4 \end{pmatrix}$$
$$\tfrac{\partial g}{\partial r}(2,2) = \langle\, \nabla g(2,2), r\,\rangle = 4\,e^4$$

<u>Alternative</u>: Man kann die Richtungsableitug auch (mühsamer) unter Verwendung ihrer Definition $\frac{\partial g}{\partial \vec{r}}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{g(\vec{x}+h\vec{r})-g(\vec{x})}{h}$ berechnen:
$$\tfrac{\partial g}{\partial r}(2,2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2-h,2+h) - g(2,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(2-h)(2+h)} - e^{(2-h)^2} - (e^4 - e^4)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{4-h^2} - e^{4-4h+h^2}}{h} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-2h\,e^{4-h^2} + (4-2h)\,e^{4-4h+h^2}}{1}$$
$$= 0 \cdot 4 + 4\,e^4 = 4\,e^4$$

(Summe: 41 Punkte)

A4*) (Nullstellen, Mittelwertsatz)

a) Es sei $f(x) = x^2 - e^{-2} + x \ln x$.

(i) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $I = (e^{-1}, 1)$ <u>mindestens eine</u> Nullstelle hat.

(i) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $I = (e^{-1}, 1)$ <u>höchstens eine</u> Nullstelle hat.

b) Es seien $x, y \in [1, 2]$ mit $x \neq y$. Finden Sie eine obere und eine untere Schranke $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ für den Term $\dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$.

<u>Hinweis</u>: Mittelwertsatz

(2+2 + 2 = 6 Punkte)

Lösung:

a) (i)
$$\left.\begin{array}{l} f(e^{-1}) = e^{-2} - e^{-2} + e^{-1}(-1) = -e^{-1} < 0 \\ f(1) = 1 - e^{-2} - 0 > 0 \\ f \text{ stetig} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f hat nach dem Nullstellensatz (auch: nach dem Zwischenwertsatz) (von Bolzano) <u>mindestens</u> eine Nullstelle.

(ii) Wir prüfen, ob f streng monoton ist:

$f'(x) = 2x + \ln x + 1$

Wegen $x \geq e^{-1}$ haben wir $\ln x \geq \ln(e^{-1}) = -1$ (Monotonie des Logarithmus),

somit $f'(x) \geq 2\,e^{-1} - 1 + 1 = 2\,e^{-1} > 0$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend auf I.

$\Rightarrow$ f hat auf I <u>höchstens</u> eine Nullstelle.

b) Mit $f(x) := \ln x$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y so dass

$$\frac{\ln x - \ln y}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

Da $\xi \in (1, 2)$, folgt $\dfrac{\ln x - \ln y}{x - y} \in (\frac{1}{2}, 1)$.