UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG, DEPARTMENT MATHEMATIK

DIPLOMVORPRÜFUNG (1. Teil, INF)

Mathematik für Ingenieure I + II, 8.10.2007, 14:30–16:30 Uhr

Prof. Dr. J. Jahn

Außer elektronischen Geräten sind alle schriftlichen Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Das Polynom $P_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$P_3(z) = -z^3 + jz - 1 + 2j \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

und $z_1 = 1 + j$ seien gegeben. Man bestimme alle reellen Zahlen $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$e^{\beta \cdot P_3(z_1)} = \sin^2 z_1 + \cos^2 z_1.$$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die diese Matrix invertierbar ist, und gebe in diesem Fall die Inverse M^{-1} in Abhängigkeit von α an.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Die Matrizen

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

seien gegeben. Man zeige, dass die $(5,5)$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist (0 bezeichnet die $(2,3)$- bzw. $(3,2)$-Nullmatrix).

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Durch die Gleichungen

$$e^{x^3 + \sin y} + \arctan y^4 = \frac{y^3}{1+x^2} + 2x + 1, \qquad y(0) = 0$$

wird eine Funktion $y(x)$ implizit definiert (die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen sind erfüllt!). Man gebe die Gleichung der Tangente der Funktion $y(x)$ im Nullpunkt an und berechne

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{2 \sin x}.$$

Aufgabe 5 **(10 Punkte)**

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{gathered} \min \quad x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 \\ \text{unter der Nebenbedingung} \\ y^2 - x^2 = 0 \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{gathered}$$

Man bestimme alle Punkte, die die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung dieses Problems erfüllen, und gebe unter diesen Punkten denjenigen mit kleinstem Zielfunktionswert an.

Aufgabe 6 **(10 Punkte)**

Man berechne das Integral

$$\iiint_G z^2 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) d(x,y,z)$$

für

$$G := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; 0 \leq z \leq 1, \;\; R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2 \right\}$$

mit beliebigen $0 < R_1 < R_2$.

Universität Erlangen-Nürnberg, Department Mathematik

DIPLOMVORPRÜFUNG (1. Teil, INF)

Mathematik für Ingenieure I + II, 8.10.2007, 14:30–16:30 Uhr

Prof. Dr. J. Jahn

Außer elektronischen Geräten sind alle schriftlichen Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Das Polynom $P_3 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ mit

$$P_3(z) = -z^3 + jz - 1 + 2j \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

und $z_1 = 1 + j$ seien gegeben. Man bestimme alle reellen Zahlen $\beta \in \mathbf{R}$ mit

$$e^{\beta \cdot P_3(z_1)} = \sin^2 z_1 + \cos^2 z_1.$$

Horner-Schema:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 0 & j & -1+2j \\
 & & -1-j & -2j & 1-j \\
\hline
z_1 = 1+j & -1 & -1-j & -j & j = P_3(z_1)
\end{array}$$

Dann gilt:

$$e^{\beta \cdot P_3(z_1)} = \sin^2 z_1 + \cos^2 z_1 \iff e^{\beta j} = 1$$

$$\iff \cos\beta + j\sin\beta = 1$$

$$\iff \begin{cases} \cos\beta = 1 \\ \sin\beta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \beta = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{\mathbb{L} := \{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}}$$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbf{R}$ sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbf{R}$, für die diese Matrix invertierbar ist, und gebe in diesem Fall die Inverse M^{-1} in Abhängigkeit von α an.

M invertierbar $\iff 0 \neq \mathrm{Det}(M) = 1 \cdot (-\alpha) \cdot 1 \cdot (-1) = \alpha$

$$\iff \underline{\underline{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}}$$

$$(M, E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \neq 0}}$$

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Die Matrizen

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

seien gegeben. Man zeige, dass die $(5,5)$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist (0 bezeichnet die $(2,3)$- bzw. $(3,2)$-Nullmatrix).

B und C sind symmetrisch.

Char. Gleichung von B: $(-\lambda)\cdot((1-\lambda)^2-1)=0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-2)=0$

EW: $0, 0, 2 \geq 0$

Char. Gleichung von C: $(1-\lambda)(3-\lambda)-3=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-4)=0$

EW: $0, 4 \geq 0$

Nach Satz 4.114, b) sind B und C positiv semidefinit.

Dann gilt:

$$(x^T, y^T)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^T, y^T) \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x^T, y^T) \begin{pmatrix} Bx \\ Cy \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{x^T B x}_{\geq 0} + \underbrace{y^T C y}_{\geq 0}$$

$$\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,\ y \in \mathbb{R}^2$$

Somit ist <u>A positiv semidefinit.</u>

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Durch die Gleichungen

$$e^{x^3+\sin y} + \arctan y^4 = \frac{y^3}{1+x^2} + 2x + 1, \quad y(0) = 0$$

wird eine Funktion $y(x)$ implizit definiert (die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen sind erfüllt!). Man gebe die Gleichung der Tangente der Funktion $y(x)$ im Nullpunkt an und berechne

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{2 \sin x}.$$

$$f(x,y) := e^{x^3+\sin y} + \arctan y^4 - \frac{y^3}{1+x^2} - 2x - 1$$

$$\Rightarrow f_x = e^{x^3+\sin y} \cdot 3x^2 + \frac{y^3 2x}{(1+x^2)^2} - 2$$

$$f_y = e^{x^3+\sin y} \cdot \cos y + \frac{1}{1+y^8} 4y^3 - \frac{3y^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y'(0) = -\left.\frac{f_x}{f_y}\right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{-2}{1} = 2$$

Gleichung der Tangente: $\underline{\underline{y = 2x}}$

de l'Hospital: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{y(x)}{2 \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y'(x)}{2 \cos x} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

alternativ (Potenzreihen): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{y(x)}{2 \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x + \ldots}{2x + \ldots} = \underline{\underline{1}}$

Aufgabe 5 **(10 Punkte)**

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\min \quad x^2+y^2-4x+8y+10$$
unter der Nebenbedingung
$$y^2-x^2=0$$
$$(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Man bestimme alle Punkte, die die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung dieses Problems erfüllen, und gebe unter diesen Punkten denjenigen mit kleinstem Zielfunktionswert an.

KKT-Bedingung: $\begin{pmatrix}2x-4\\2y+8\end{pmatrix}+v_1\begin{pmatrix}-2x\\2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-v_1x=2\\ y+v_1y=-4\end{array}\right\} \quad (*)$$

Nebenbedingung: $y^2-x^2=0 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{x^2}=\pm|x|$

Fallunterscheidung:

1) $x\geq 0$

a) $y=|x|=x$

$(*)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-v_1x=2\\ x+v_1x=-4\end{array}\right\} \Rightarrow x=-1$ ↯

b) $y=-|x|=-x$

$(*)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-v_1x=2\\ -x-v_1x=-4\end{array}\right\} \Rightarrow x=3,\ y=-3$ ✓

2) $x<0$

a) $y=|x|=-x$

$(*)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-v_1x=2\\ -x-v_1x=-4\end{array}\right\} \Rightarrow x=3$ ↯

b) $y=-|x|=x$

$(*)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-v_1x=2\\ x+v_1x=-4\end{array}\right\} \Rightarrow x=-1,\ y=-1$ ✓

Unter den KKT-Punkten $\underline{\underline{(3,-3)}}$ (Zielfunktionswert: -8) und $\underline{\underline{(-1,-1)}}$ (Zielfunktionswert: 8) hat der Punkt $\underline{\underline{(-3,-3)}}$ den kleinsten Zielfunktionswert.

Aufgabe 6 **(10 Punkte)**

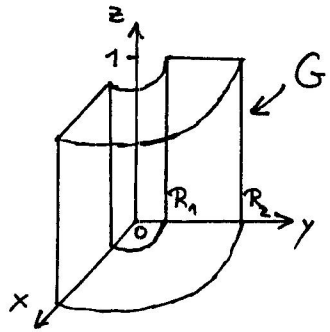
Man berechne das Integral

$$\iiint_G z^2\left(x^2+y^2+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)d(x,y,z)$$

für

$$G:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq 1,\ R_1^2\leq x^2+y^2\leq R_2^2\right\}$$

mit beliebigen $0<R_1<R_2$.



Zylinderkoordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=t\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\\ R_1\leq r\leq R_2\\ 0\leq t\leq 1\end{array}$$

$$\iiint_G z^2\left(x^2+y^2+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)d(x,y,z)$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 t^2\left(r^2+\frac{1}{r}\arccos\cos\varphi\right)r\,dt\,d\varphi\,dr$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 t^2\left(r^3+\varphi\right)dt\,d\varphi\,dr$$

$$=\frac{1}{3}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3+\varphi\,d\varphi\,dr$$

$$=\frac{\pi}{6}\int_{R_1}^{R_2} r^3+\frac{\pi}{4}\,dr$$

$$=\underline{\underline{\frac{\pi}{24}\left(R_2^4-R_1^4+\pi(R_2-R_1)\right)}}$$