

Braindump GLoIn SS 2018

1 Wahrheitstafeln

Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln die folgenden logischen Konsequenzen. Im Falle eines Widerlegs müssen Sie die entsprechende Zeile in der Wahrheitstafel deutlich markieren und argumentieren, warum dies einen Widerleg darstellt.

- a) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge A \wedge B \models C$
- b) $A \rightarrow \neg B \models (\neg B) \rightarrow A$
- c) $(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow \neg C) \models \perp$
- d) $(\neg A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge ((A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C)) \models \perp$

2 Prädikatenlogik

Formalisieren Sie Aussagen auf folgender Signatur:

$$\Sigma = \{0/0, 1/1, +/2, */2, \geq /2, isInt/1\}$$

isInt gibt an, ob es sich um eine ganze Zahl handelt. + und *, \geq sind Infix zu notieren, *isInt* als Präfixoperation.

- a) n ist das Produkt aus zwei Primzahlen (Natürliche Zahlen)
- b) 2 ist die einzige gerade Primzahl (Natürliche Zahlen)
- c) Die Quadratzahl von 2 ist irrational (Reelle Zahlen)
- d) Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt stets eine irrationale Zahl (Reelle Zahlen)
- e) Die Differenz zweier rationaler Zahlen ist wieder rational (Reelle Zahlen)

3 Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$\{h(z, h(g(y), y) \doteq h(x, h(z, f(x)))\}$$

unifizierbar sind und ggf. einen mgu zu berechnen. (Achtung: es ist durchaus von Bedeutung, dass die beiden Seiten gemeinsame Variablen verwenden!). Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

4 Resolution

a)

Bringen Sie die Formel (nicht ihre Negation!)

$$\forall x(\exists y(\exists z(P(z, y)) \rightarrow \exists w(R(x, y, w))) \rightarrow \exists y(Q(y)))$$

in pränexer Normalform, sodann in Skolemform und schließlich in Klauselform. Geben Sie bei den Umformungen ggf. die nötigen Zwischenschritte an.

b)

Verwenden Sie das prädikatenlogische Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass die aus den Klauseln

$$\begin{aligned} &\{R(x, f(x))\} \\ &\{\neg R(x, y), R(y, x)\} \\ &\{\neg P(x), \neg R(x, y), P(y)\} \\ &\{P(a)\} \\ &\{\neg P(b)\} \\ &\{R(f(a), f(b))\} \end{aligned}$$

bestehende Klauselform unerfüllbar ist. *Hinweis:* x und y sind Variablen, a und b sind Konstanten und f ist ein einstelliges Funktionssymbol.

5 Fitch

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für die Formel

$$\forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(y))$$

unter folgenden Annahmen:

$$\begin{aligned} &\forall x \exists y (R(x, y)) \\ &\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow P(y)) \end{aligned}$$

6 Induktion

Sei $\Sigma = \{mult/2\}$, und sei \mathcal{M} ein Σ , so dass $M = \{-1, 1\}$.

Für $mult$ gelten die Regeln, die man für Multiplikation erwarten würde: Für alle $x, y \in M$:

$$\mathfrak{M}[[mult]](x, y) = xy$$

Zeigen Sie per Induktion über E , dass für jeden Term E (eventuell mit Variablen) und jede Umgebung η gilt: Wenn E eine gerade Anzahl von Vorkommen(!) von Variablen enthält, die unter η den Wert -1 haben, dann gilt:

$$\mathfrak{M}[[E]]_{\eta} = 1$$

Hinweis: Sie müssen hier die Induktionsbehauptung verstärken!