Klausur Braindump*

Berechenbarkeit und formale Sprachen

Wintersemester 2020

1 Wissensfragen

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (die jeweiligen Beweise sind äußerst kurz). Schreiben Sie "**Stimmt**" oder "**Stimmt nicht**" und begründen Sie Ihre Antwort:

a) Sei L die Sprache, die durch den regulären Ausdruck $R = a^*b^*c^*$ beschrieben wird. Dann hat jede Teilmenge $L_1 \subseteq L$ die kontextfreie Pump-Eigenschaft.

b) Seien L_2 und L_3 zwei kontextfreie Sprachen. Dann ist $L_2 \cap L_3$ entscheidbar.

c) Sei H das allgemeine unentscheidbare Halteproblem. Jede echte Teilmenge von H ist unentscheidbar.

2 Halteproblem

a) Geben Sie die Definition des initialen Halteproblems an:

$$\mathrm{H}_\varepsilon := \{$$

b) Beweisen Sie mittels Reduktion, dass die Sprache

$\mathrm{L}_{2b} = \{\langle M \rangle\, w \mid$ M ist deterministische 1-Band-TM mit Eingabe z, $z \in \{0,1\}^*$, $w \neq \varepsilon$
  (i) M hält **nicht**, falls $z = w$
  (ii) M hält, falls $z \neq w$
  $\}$

nicht entscheidbar ist. Benutzen sie dazu H_ε.

* *Wie Immer:* Keine Garantie auf Richtigkeit. Angaben werden zum meisten Teil vereinfacht wiedergegeben. Fehler und Verbesserungen via Gitlab melden: `https://gitlab.cs.fau.de/eh09yqyk/bfsdump-ws20`.

3 Reguläre Pumpeigenschaft

a) Geben sie die *reguläre Pumpeigenschaft* an:

Eine Sprache hat die reguläre Pumpeigenschaft wenn...

b) Zeigen sie **durch direkte Anwendung der Definition**, dass die Sprache

$$\mathrm{L}_{3b} = \{\, a \mid a \in \{0,1\}^*\,,\ |a| = k \geq 4,\ a = a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k,\ a_2 = a_{k-1} \}$$

die reguläre Pumpeigenschaft hat.

Kleiner Hinweis: Vergessen Sie bei der Wahl von n_L nicht den Pumpfall $i = 0$.

c) Sei z^{bc} das *binary complement* zu z mit $z_i^{bc} = (1 - z_i)$.

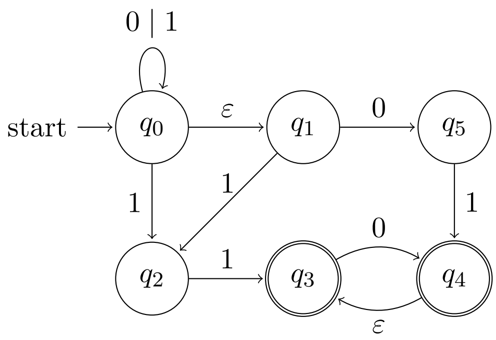
Zeigen sie **durch direkte Anwendung der Definition**, dass die Sprache

$$\mathrm{L}_{3c} = \left\{ z z^{bc} z \mid z \in \{0,1\}^* \right\}$$

die reguläre Pumpeigenschaft **nicht** hat.
Beispiel: $001100 \in \mathrm{L}_{3c}$, $000111000 \in \mathrm{L}_{3c}$, $0011 \notin \mathrm{L}_{3c}$.

4 Automaten

a) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat A_1 mit $\Sigma = \{0,1\}$:

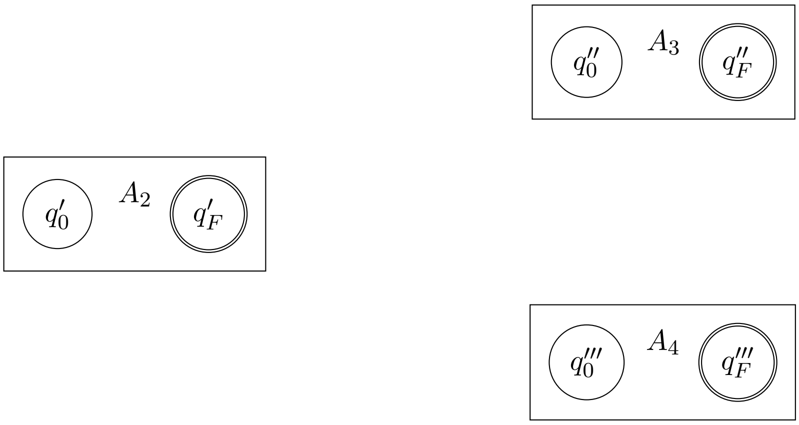


Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung (es muss erkennbar sein!) einen zu A_1 äquivalenten deterministischen endlichen Automaten. Zeichnen Sie nur die vom Startzustand aus erreichbaren Zustände, diese aber alle. Führen Sie keine „Vereinfachungen“ durch.

b) Gegeben sind die Automaten A_1, A_2 und A_3 jeweils mit den Startzuständen q_0', q_0'', q_0''' und den Endzuständen q_F', q_F'', q_F'''. Konstruieren Sie aus den gegebenen Automaten einen neuen Automaten A_1, ggf. mit einem (neuen!) Anfangszustand $q_0^{(v)}$ und einem (neuen!) Endzustand $q_F^{(v)}$. A_1 soll folgende Sprache akzeptieren:

$$L(A_2)^* \circ (L(A_3) \cup L(A_4))^*$$

Warnung: Denken Sie an die Definition von ()* und beachten Sie die Potenz 0.



c) Sei M ein deterministischer endlicher Automat, $Q = q_1, ..., q_n$ die Menge seiner Zustände, q_1 sein Startzustand und F die Menge seiner Endzustände. Vervollständigen Sie die rekursive Definition von $R_{i,j}^k$ aus der Vorlesung:

$k = 0$ und $i \neq j$:

$$R_{i,j}^0 = \bigcup_{\substack{a \in \Sigma: \\ \delta(q_i, a) = q_j}} a$$

$k = 0$ und $i = j$:

$$R_{i,i}^0 = \left(\bigcup_{\substack{a \in \Sigma: \\ \delta(q_i, a) = q_i}} a \right) \cup \{\varepsilon\}$$

$k > 0$:

$$R_{i,j}^k =$$

Wie bildet man aus den $R_{i,j}^k$ den regulären Ausdruck R, der die vom Automaten M akzeptierte Sprache beschreibt?

$$R =$$

5 Kontextfreie Sprache

a) Der CYK-Algorithmus bietet eine Möglichkeit zu prüfen, ob ein Wort w in einer von der kontextfreien Grammatik G erzeugten Sprache enthalten ist. Dazu bedient sich Algorithmus der Hilfskonstruktion $V(i,j) = \{A \mid A \in V,\ A \xrightarrow{*} a_i \ . \ . \ . \ a_j\}$ mit $i \leq j$. Geben Sie die rekursive Definition des CYK-Algorithmus formal an:

$i = j$:

$$V(i,i) :=$$

$i < j$:

$$V(i,j) :=$$

b) Gegeben Sei die folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, \mathcal{S})$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S} \to AB\\
&A \to CD \mid CF\\
&B \to EB \mid c\\
&C \to a\\
&D \to b\\
&E \to c\\
&F \to AD
\end{aligned}$$

Zeichnen Sie den Syntaxbaum für das Wort *aaabbbcc* und markieren sie alle Felder in der Tabelle, welche Sie benutzt haben mit $\bullet$[1].

a	a	a	b	b	b	c	c
{C}	{C}	{C}	{D}	{D}	{D}	{B, E}	{B, E}
{}	{}	{A}	{}	{}	{}	{B}	
{}	{}	{F}	{}	{}	{}		
{}	{A}	{}	{}	{}			
{}	{F}	{}	{}				
{A}	{}	{}					
{S}	{}						
{S}●							

[1] *Hinweis:* Die Aufgabe wurde aus dem Braindump des Sommersemesters 2019 kopiert. Sie kam bei uns aber in sehr ähnlicher, wenn nicht sogar in genau der selben Form in der Klausur dran.

6 Reduktion

a) Geben Sie die Definition für CLIQUE an:

$$\textsc{Clique} := \{$$

Falls Sie dabei Begriffe wie "vollständiger Teilgraph" verwenden, müssen diese entsprechend definiert werden.

b) Gegeben ist die Sprache L_{3b} aus Aufgabe 3b):

$$L_{3b} = \{\, a \mid a \in \{0,1\}^*\,,\ |a| = k \geq 4,\ a = a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k,\, a_2 = a_{k-1}\}$$

Zeigen Sie, dass $L_{3b} \leq_p$ CLIQUE gilt.

c) Angenommen P = NP. Zeigen Sie, dass CLIQUE $\leq_p L_{3b}$.

Begründen Sie unter Verwendung der Definition von NP-Vollständigkeit, dass L_{3b} dann NP-vollständig ist. Verwenden Sie hierzu die Definition der NP-Vollständigkeit.