

Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2–4 den kompletten Lösungsweg in nachvollziehbarer Weise an. Schreiben Sie auch Nebenrechnungen mit auf. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Konstruieren Sie eine irreduzible und aperiodische homogene Markow-Kette bestehend aus zwei Knoten.

- (2 Punkte) Zeichnen Sie den Graphen und geben Sie die Übergangsmatrix P an.
- (2 Punkte) Begründen Sie, dass die Übergangsmatrix aus a) eine (zeilen)stochastische Matrix ist und dass die homogene Markow-Kette irreduzibel ist.

Ersatzlösung: Falls Sie in a) keine Lösung haben, verwenden Sie $P_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

- (1 Punkt) Begründen Sie, warum diese homogene Markow-Kette für jeden Anfangszustand gegen die Gleichgewichtsverteilung π konvergiert.
- (3 Punkte) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung der von Ihnen konstruierten Markow-Kette.
Verwenden Sie ggf. die Ersatzlösung aus b).

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , deren gemeinsamer Dichte $f^{(X,Y)}$ durch den Ausdruck

$$f^{(X,Y)}(x, y) = -c \frac{x}{y^2} \cdot 1_{(0,1)}(x) \cdot 1_{(\frac{2}{3}, 2)}(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R},$$

gegeben sei.

- (1 Punkt) Zeichnen Sie den Träger von $f^{(X,Y)}$.
- (4 Punkte) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $f^{(X,Y)}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- (3 Punkte) Berechnen Sie die Randdichten f^Y und f^X .
- (1 Punkt) Begründen Sie, ob X und Y stochastisch unabhängig sind oder nicht.
- (1 Punkt) Stellen Sie das Integral zur Berechnung von $P(X + Y \leq 2)$ auf. (Nicht lösen!)

Aufgabe 4

(9 Punkte)

- (4 Punkte) Eine faire Münze mit den Seiten 0 (Null) und 1 (Eins) werde viermal geworfen und die gezeigten Werte werden aufsummiert. Die Würfe sind stochastisch unabhängig. Die Zufallsvariable W beschreibe dieses wiederholte Werfen. Bestimmen Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell und geben Sie den Erwartungswert $E[W]$ und die Varianz $\text{Var}[W]$ an.
- (5 Punkte) Das oben beschriebene Spiel wird nun 100 mal wiederholt. S_{100} beschreibt die (kumulierte) Summe aller Spielstände. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(S_{100} > 228)$. Falls Sie Sätze aus der Stochastik anwenden, benennen Sie diese und begründen Sie die Anwendbarkeit.