

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \leq x < 1, \\ e^{a(x-1)} & x \geq 1. \end{cases}$$

- Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ eine Riemann-Dichte $f^X(x)$ einer Zufallsvariablen X ? Skizzieren Sie für dieses a die Funktion.
- Berechnen Sie die Erwartungswerte EX und $E[e^{3X}]$. Welcher der Erwartungswerte existiert?
- Berechnen Sie zur Riemann-Dichte $f^X(x)$ die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein Pendler muss täglich seinen Arbeitsweg mit Tram und Bus bewältigen. Aufgrund des hohen Verkehrsaufkommens verspätet er sich täglich. Die durch die Tram (T) verursachte Verspätung beträgt zwischen 0 und 10 Minuten (stetig gleichverteilt), während der Bus (B) sich sogar um bis zu 20 Minuten verspäten kann (stetig gleichverteilt).

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Pendler insgesamt um höchstens 10 Minuten verspätet, falls die Verspätungen von (T) und (B) stochastisch unabhängig sind?
Geben Sie die R-Dichte im \mathbb{R}^2 an und skizzieren Sie das Ereignis.
- Der Pendler hat nun 10 Minuten Aufenthalt, falls sich die Tram um mehr als 5 Minuten verspätet. Wie groß ist für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit, dass er sich insgesamt unter 10 Minuten verspätet?
Geben Sie die R-Dichte im \mathbb{R}^2 an, skizzieren Sie das Ereignis und berechnen Sie die Randdichte f^B vom Bus aus der gemeinsamen Verteilung.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & ? & ? \\ 0 & \frac{1}{2} & ? & 0 \\ 0 & ? & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ? & ? & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Vervollständigen Sie die Matrix P .
- Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen homogenen Markow-Kette.
- Überprüfen Sie, ob die Matrix P irreduzibel ist.
- Gibt es eine Gleichgewichtsverteilung? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein Würfel ist an einer Seite gelb, an zwei Seiten grün und an drei Seiten orange eingefärbt. Dieser Würfel wurde wiederholt mit folgenden Ergebnissen geworfen:

Seite	gelb	orange	grün
Anzahl	15	24	21

- Geben Sie die Zähl-dichte an, die sich aus der Tabelle ergibt.
- Der Würfel soll auf Echtheit getestet werden. Prüfen Sie mit einem geeigneten Test, ob die Hypothese H_0 der Echtheit des Würfels zum 5%-Niveau angenommen werden kann. Wird H_0 auch zum 10%-Niveau angenommen?