

## Klausur Braindump\*

# Berechenbarkeit und formale Sprachen

WINTERSEMESTER 2020

## 1 Wissensfragen

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (die jeweiligen Beweise sind äußerst kurz). Schreiben Sie “**Stimmt**” oder “**Stimmt nicht**” und begründen Sie Ihre Antwort:

- Sei  $L$  die Sprache, die durch den regulären Ausdruck  $R = a^*b^*c^*$  beschrieben wird. Dann hat jede Teilmenge  $L_1 \subseteq L$  die kontextfreie Pump-Eigenschaft.
- Seien  $L_2$  und  $L_3$  zwei kontextfreie Sprachen. Dann ist  $L_2 \cap L_3$  entscheidbar.
- Sei  $H$  das allgemeine unentscheidbare Halteproblem. Jede echte Teilmenge von  $H$  ist unentscheidbar.

## 2 Halteproblem

- Geben Sie die Definition des initialen Halteproblems an:

$$H_\varepsilon := \{$$

- Beweisen Sie mittels Reduktion, dass die Sprache

$$L_{2b} = \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ ist deterministische 1-Band-TM mit Eingabe } z, z \in \{0,1\}^* \\ \text{(i) } M \text{ hält } \mathbf{nicht}, \text{ falls } z = w \\ \text{(ii) } M \text{ hält, falls } z \neq w \\ \}$$

nicht entscheidbar ist. Benutzen sie dazu  $H_\varepsilon$ .

---

\**Wie Immer*: Keine Garantie auf Richtigkeit. Angaben werden zum meisten Teil vereinfacht wiedergegeben. Fehler und Verbesserungen via Gitlab melden: <https://gitlab.cs.fau.de/eh09yqyk/bfsdump-ws20>.

### 3 Reguläre Pumpeigenschaft

a) Geben sie die *reguläre Pumpeigenschaft* an:

Eine Sprache hat die reguläre Pumpeigenschaft wenn...

b) Zeigen sie **durch direkte Anwendung der Definition**, dass die Sprache

$$L_{3b} = \{ a \mid a \in \{0, 1\}^*, |a| = k \geq 4, a = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k, a_2 = a_{k-1} \}$$

die reguläre Pumpeigenschaft hat.

*Kleiner Hinweis:* Vergessen Sie bei der Wahl von  $n_L$  nicht den Pumpfall  $i = 0$ .

c) Sei  $z^{bc}$  das *binary complement* zu  $z$  mit  $z_i^{bc} = (1 - z_i)$ .

Zeigen sie **durch direkte Anwendung der Definition**, dass die Sprache

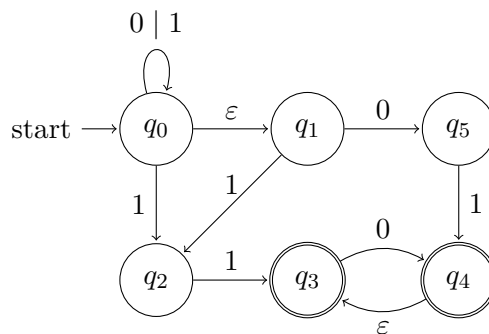
$$L_{3c} = \{ z z^{bc} z \mid z \in \{0, 1\}^* \}$$

die reguläre Pumpeigenschaft **nicht** hat.

*Beispiel:*  $001100 \in L_{3c}$ ,  $000111000 \in L_{3c}$ ,  $0011 \notin L_{3c}$ .

### 4 Automaten

a) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat  $A_1$  mit  $\Sigma = \{0, 1\}$ :

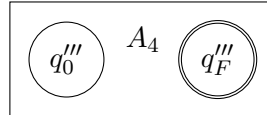
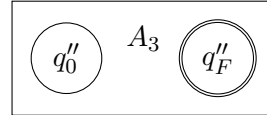
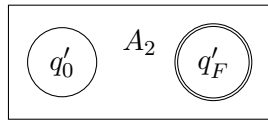


Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung (es muss erkennbar sein!) einen zu  $A_1$  äquivalenten deterministischen endlichen Automaten. Zeichnen Sie nur die vom Startzustand aus erreichbaren Zustände, diese aber alle. Führen Sie keine „Vereinfachungen“ durch.

- b) Gegeben sind die Automaten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  jeweils mit den Startzuständen  $q'_0$ ,  $q''_0$ ,  $q'''_0$  und den Endzuständen  $q'_F$ ,  $q''_F$ ,  $q'''_F$ . Konstruieren Sie aus den gegebenen Automaten einen neuen Automaten  $A_4$ , ggf. mit einem (neuen!) Anfangszustand  $q_0^{(v)}$  und einem (neuen!) Endzustand  $q_F^{(v)}$ .  $A_4$  soll folgende Sprache akzeptieren:

$$L(A_2)^* \circ (L(A_3) \cup L(A_4))^*$$

**Warnung:** Denken Sie an die Definition von  $()^*$  und beachten Sie die Potenz 0.



- c) Sei  $M$  ein deterministischer endlicher Automat,  $Q = q_1, \dots, q_n$  die Menge seiner Zustände,  $q_1$  sein Startzustand und  $F$  die Menge seiner Endzustände. Vervollständigen Sie die rekursive Definition von  $R_{i,j}^k$  aus der Vorlesung:

$k = 0$  und  $i \neq j$ :

$$R_{i,j}^0 = \bigcup_{\substack{a \in \Sigma: \\ \delta(q_i, a) = q_j}} a$$

$k = 0$  und  $i = j$ :

$$R_{i,i}^0 = \left( \bigcup_{\substack{a \in \Sigma: \\ \delta(q_i, a) = q_i}} a \right) \cup \{\varepsilon\}$$

$k > 0$ :

$$R_{i,j}^k =$$

Wie bildet man aus den  $R_{i,j}^k$  den regulären Ausdruck  $R$ , der die vom Automaten  $M$  akzeptierte Sprache beschreibt?

$$R =$$

## 5 Kontextfreie Sprache

- a) Der CYK-Algorithmus bietet eine Möglichkeit zu prüfen, ob ein Wort  $w$  in einer von der kontextfreien Grammatik  $G$  erzeugten Sprache enthalten ist. Dazu bedient sich Algorithmus der Hilfskonstruktion  $V(i, j) = \{A \mid A \in V, A \xrightarrow{*} a_i \dots a_j\}$  mit  $i \leq j$ . Geben Sie die rekursive Definition des CYK-Algorithmus formal an:

$i = j$ :

$$V(i, i) :=$$

$i < j$ :

$$V(i, j) :=$$

- b) Gegeben Sei die folgende Grammatik  $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, \mathcal{S})$ ,

$$\mathcal{S} \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow CD \mid CF$$

$$B \rightarrow EB \mid c$$

$$C \rightarrow a$$

$$D \rightarrow b$$

$$E \rightarrow c$$

$$F \rightarrow AD$$

Zeichnen Sie den Syntaxbaum für das Wort  $aaabbbcc$  und markieren sie alle Felder in der Tabelle, welche Sie benutzt haben mit  $\bullet$ <sup>1</sup>.

	a	a	a	b	b	b	c	c
	{C}	{C}	{C}	{D}	{D}	{D}	{B, E}	{B, E}
	{}	{}	{A}	{}	{}	{}	{B}	
	{}	{}	{F}	{}	{}	{}		
	{}	{A}	{}	{}	{}			
	{}	{F}	{}	{}				
	{A}	{}	{}					
	{S}	{}						
	{S}•							

<sup>1</sup>*Hinweis:* Die Aufgabe wurde aus dem Braindump des Sommersemesters 2019 kopiert. Sie kam bei uns aber in sehr ähnlicher, wenn nicht sogar in genau der selben Form in der Klausur dran.

## 6 Reduktion

- a) Geben Sie die Definition für CLIQUE an:

$$\text{CLIQUE} := \{$$

Falls Sie dabei Begriffe wie “vollständiger Teilgraph” verwenden, müssen diese entsprechend definiert werden.

- b) Gegeben ist die Sprache  $L_{3b}$  aus Aufgabe 3b):

$$L_{3b} = \{ a \mid a \in \{0, 1\}^*, |a| = k \geq 4, a = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k, a_2 = a_{k-1} \}$$

Zeigen Sie, dass  $L_{3b} \leq_p \text{CLIQUE}$  gilt.

- c) Angenommen  $P = NP$ . Zeigen Sie, dass  $\text{CLIQUE} \leq_p L_{3b}$ .

Begründen Sie unter Verwendung der Definition von NP-Vollständigkeit, dass  $L_{3b}$  dann NP-vollständig ist. Verwenden Sie hierzu die Definition der NP-Vollständigkeit.