Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor (INF,IP,ILS) — SoSe 2022
Prof. Dr. S. Kräutle — Montag, 10.10.2022 — Dauer: 90 min

Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.
Für alle Ergebnisse muss der Rechenweg mit angegeben werden.

A1) (Grenzwerte von Folgen, Grenzwerte von Funktionen)

a) Berechnen Sie die Folgengrenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n}}{n}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{5\ln n+n^2+\alpha n}-\sqrt{\ln n+n^2+\beta n}\,,\ \alpha\neq\beta$

<u>Hinweis</u>: Grenzwerte der Form $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}$ können als bekannt vorausgesetzt und benutzt werden.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

b) Berechnen Sie die Funktionengrenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{e^2-e^{2\cos x}}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x}$

(8+6=14 Punkte)

Lösung:

a)

(i) „Wurzel minus Wurzel" erweitern wir geeignet:

$$\lim_n n\cdot(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}) = \lim_n \frac{n\cdot[(\cancel{n^2}+2)-(\cancel{n^2}+1)]}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_n \frac{n}{n\cdot\left[\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right]} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(ii) Hier ist das Erweitern mit der Summe der Wurzeln nicht nötig:

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n}}{n} = \lim_n \frac{\cancel{n}\cdot\left[\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right]}{\cancel{n}} = \lim_n \sqrt{2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt{2}-\sqrt{0} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

[Alternative:

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n}}{n} = \lim_n \frac{2n^2+1-n}{n(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n})} = \lim_n \frac{\cancel{n^2}(2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n})}{\cancel{n^2}(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}})}$$

$$= \frac{2+0+0}{\sqrt{2}+\sqrt{0}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$]

(iii) Analog zu (i):

$$\lim_n \sqrt{5\ln n+n^2+\alpha n} - \sqrt{\ln n+n^2+\beta n}$$

$$= \lim_n \frac{(5\ln n+\cancel{n^2}+\alpha n)-(\ln n+\cancel{n^2}+\beta n)}{\sqrt{5\ln n+n^2+\alpha n}+\sqrt{\ln n+n^2+\beta n}}$$

$$= \lim_n \frac{4\ln n+(\alpha-\beta)n}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = \lim_n \frac{\cancel{n}\cdot[4\overbrace{\frac{\ln n}{n}}^{\to 0}+\alpha-\beta]}{\cancel{n}\cdot[\sqrt{5\underbrace{\frac{\ln n}{n^2}}_{\to 0}+1+\underbrace{\frac{\alpha}{n}}_{\to 0}}+\sqrt{\underbrace{\frac{\ln n}{n^2}}_{\to 0}+1+\underbrace{\frac{\beta}{n}}_{\to 0}}]}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

(iv) $$\lim_n \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}\right) = \lim_n \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_n \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_n \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b)

(i) Typus „$\frac{0}{0}$"; naheliegend: Regel von de l'Hospital, zweimal:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x \sin x}^{\to 0}}{e^2 - \underbrace{e^{2\cos x}}_{\to e^2}} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1\cdot \sin x}^{\to 0} + \overbrace{x\cdot \cos x}^{\to 0}}{e^{2\cos x}\cdot \underbrace{2\sin x}_{\to 0}} \qquad (*)$$

$$\overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos x + \cos x}^{\to 2} - \overbrace{x\cdot \sin x}^{\to 0}}{\underbrace{e^{2\cos x}}_{\to e^2}\cdot(\underbrace{4\sin^2 x}_{\to 0} + \underbrace{2\cos x}_{\to 2})} = \frac{2}{e^2\cdot 2} = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

<u>Variante:</u> Nach dem 1. „Hospital" kann man den Bruch zerlegen:

$$(*) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin x}}{\underbrace{e^{2\cos x}\, 2}_{\to 2e^2}\cancel{\sin x}} + \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\cdot \frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{2e^{2\cos x}}_{\to 2e^2}} = \frac{1}{2e^2} + 1\cdot \frac{1}{2e^2} = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

(ii)

Variante 1: Da Typus „$\frac{0}{0}$" vorliegt, machen wir „Hospital" unter Verwendung von $\tan' = 1+\tan^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x\tan x - \frac{1}{2}x^2}^{\to 0}}{\underbrace{\tan^2 x}_{\to 0}} \overset{\text{(Hospi)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \tan x + x\cdot(\cancel{1}+\tan^2 x) - \cancel{x}}{2\tan x\cdot(1+\tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \tan^2 x}{2\tan x\cdot(1+\tan^2 x)} \overset{\text{(Kürzen)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+\overbrace{\tan x}^{\to 0}}{2(1+\underbrace{\tan^2 x}_{\to 0})} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Variante 2: Wie oben, jedoch mit $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ (mühsamer!):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x - \frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x} \overset{\text{(Hospi)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot\tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - x}{2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\overset{\substack{\text{(erweitern}\\ \text{mit } \cos^2)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\tan x\cos^2 x}^{=\frac{\sin}{\cos}} + \overbrace{x - x\cos^2 x}^{= x\sin^2 x}}{2\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x\sin^2 x}{2\,\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\overset{\text{erw. m. cos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin x}\cdot(\cos^2 x - x\sin x\cos x)}{2\,\cancel{\sin x}} = \frac{1-0}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Variante 3: Zuerst den Bruch zerlegen, dann Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x - \frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\right)^2$$

$$\overset{\text{(Hospi)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan^2 x} - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Variante 4: Zuerst $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ersetzen

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \tan x - \frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{2}x^2}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\overset{\text{(erweitern mit }\cos^2\text{)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(x \sin x - \frac{1}{2}x^2\right)\cos x}{\sin^2 x} \overset{\text{(zerlegen)}}{=} \lim_{x\to 0} \Bigg[\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} - \frac{1}{2}\cdot\Big(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\Big)^2\Bigg]\cdot \underbrace{\cos x}_{\to 1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2\right)\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Variante 5: $\tan x = x + O(x^2)$ verwenden (ist etwas heikel, da die Taylor-Reihe vom Tangens nicht in Vorlesung dran kam, aber dafür soll es trotzdem die Punkte geben):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \tan x - \frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(x + O(x^2)\right) - \frac{1}{2}x^2}{\left(x + O(x^2)\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^3) - \frac{1}{2}x^2}{x^2 + O(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2} + O(x)\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(1 + O(x)\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

A2) (Konvergenzradius von Potenzreihen)

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihen

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^2+4k}{5k^2+6k} \right)^{2k} x^k, \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} e^{4k+\frac{1}{k}} x^{2k}$$

(5 Punkte)

Lösung:

a) $$\sqrt[k]{\left| \left(\frac{2k^2+4k}{5k^2+6k} \right)^{2k} \right|} = \left(\frac{2k^2+4k}{5k^2+6k} \right)^2 = \left(\frac{2+\frac{4}{k}}{5+\frac{6}{k}} \right)^2 \xrightarrow{(k\to\infty)} \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{R = \left(\frac{5}{2}\right)^2}}$$

b) Substitution $y := x^2$ liefert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} e^{4k+\frac{1}{k}} y^k$.

Deren Konvergenzradius $\tilde{R}$:

$$\sqrt[k]{\left| e^{4k+\frac{1}{k}} \right|} = e^{4+\frac{1}{k^2}} \xrightarrow{(k\to\infty)} e^4 \Longrightarrow \tilde{R} = e^{-4}$$

$$|y| \lessgtr e^{-4} \Longleftrightarrow x^2 \lessgtr e^{-4} \Longleftrightarrow |x| \lessgtr e^{-2} \Longrightarrow \underline{\underline{R = e^{-2}}}$$

[Variante: Schreibe Reihe als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

$$\rightsquigarrow a_k = \begin{cases} e^{2k+\frac{2}{k}}, & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade} \end{cases} \Longrightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} e^{2+\frac{k}{k^2}}, & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diese Folge hat die Häufungspunkte e^2 und 0,
also den Limes superior e^2 $\Longrightarrow \underline{\underline{R = e^{-2}}}$]

A3) (Differenzieren)

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\ \ln(\ln x) & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x \leq 1\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x > 1$.

b) Prüfen Sie, ob $f'(1)$ existiert.

(2+2=4 Punkte)

Lösung:

a) $$f'(x) = \frac{d}{dx}\,\big((x-1)\ln(\ln x)\big)$$

$$= 1 \cdot \ln(\ln x) + (x-1) \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \underline{\underline{\ln(\ln x) + \frac{x-1}{x \ln x}}} \qquad \forall x > 1$$

b) Prüfe „rechtsseitige Ableitung":

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\cancel{(1+h-1)} \cdot \ln(\ln(1+h)) - 0}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \searrow 0} \underbrace{\ln(\underbrace{\ln(\overset{\to 1}{\overbrace{1+h}})}_{\to \ln(1) = 0})}_{\to -\infty} = -\infty$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{f'(1) \text{ existiert nicht}}}$$

A4) (Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.
Hinweis: Bei zwei der drei Integrale sollte man mit einer Substitution starten.
Bemerkung: Es ist jeweils eine Rechnung erforderlich; es ist *nicht* gestattet, das Ergebnis ohne Rechnung einer Formelsammlung zu entnehmen.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos(e^{2x})\, e^{2x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \sinh(nx)\, e^{x/2}\, dx\ ;\ \ n\in\mathbb{N}$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}\, dx\ , \quad x>-1$

(3+5+4=12 Punkte)

Lösung:

a) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \cos(e^{2x})e^{2x}dx$ Substitution $y := e^{2x}$

$x=\frac{1}{2} \rightsquigarrow y=e$

$x=1 \rightsquigarrow y=e^2$

$$= \int_e^{e^2} \frac{1}{2}\cos y\, dy = \frac{1}{2}\sin y\Big|_e^{e^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left[\sin(e^2)-\sin(e)\right]}}$$

b) Am naheliegendsten ist vermutlich: zweimal partiell integrieren.
Sinnvoll: sinh ableiten, exp integrieren, denn das vermeidet Brüche

$$\int \underbrace{\sinh(nx)}_{\text{abl.}}\cdot \underbrace{e^{x/2}}_{\text{int}}dx = \sinh(nx)\cdot 2e^{x/2} - \int \underbrace{n\cosh(nx)}_{\text{abl.}}\cdot\underbrace{2e^{x/2}}_{\text{int.}}dx$$

$$= \sinh(nx)\cdot 2e^{x/2} - \left[n\cosh(nx)\cdot 4e^{x/2} - \int n^2\cdot\sinh(nx)\cdot 4e^{x/2}dx\right]$$

$$= 2\sinh(nx)e^{x/2} - 4n\cosh(nx)\cdot e^{x/2} + 4n^2\int \sinh(nx)\cdot e^{x/2}dx$$

Sortieren:

$$(1-4n^2)\cdot\int\sinh(nx)\cdot e^{x/2}dx = \left[2\sinh(nx) - 4\cosh(nx)\right]e^{x/2}$$

$$\Longrightarrow \int \sinh(nx)e^{x/2}dx = \underline{\underline{\frac{[2\sinh(nx) - 4\cosh(nx)]\cdot e^{x/2}}{1-4n^2}}}$$

(Kann man noch mit (−1) durchmultiplizieren)

<u>Variante:</u> „andersherum" zweimal partiell integrieren.

<u>Weitere Variante:</u> $\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ benutzen:

$$\int \sinh(nx)\cdot e^{x/2}\,dx = \int \tfrac{1}{2}\left(e^{nx}-e^{-nx}\right)e^{x/2}\,dx$$

$$= \int \tfrac{1}{2}\left(e^{(n+\frac{1}{2})x}-e^{(-n+\frac{1}{2})x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2(n+\frac{1}{2})}\,e^{(n+\frac{1}{2})x} - \frac{1}{2(-n+\frac{1}{2})}\,e^{(-n+\frac{1}{2})x}$$

$$\overset{(H.N.)}{=} \frac{(1-2n)e^{(n+\frac{1}{2})x}-(1+2n)e^{(-n+\frac{1}{2})x}}{1-4n^2} = \ldots \quad \Big\}\ \text{optional}$$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}\,dx$ | Substitution $y := \ln(1+x)$ $\rightsquigarrow \dfrac{dx}{1+x} = dy$ und $1+x = e^{y}$

$$= \int \frac{1+y}{e^{y}}\,dy = \int \underbrace{(1+y)}_{\text{abl.}}\cdot\underbrace{e^{-y}}_{\text{int.}}\,dy$$

$$\overset{(P.I.)}{=} (1+y)\cdot(-e^{-y}) - \int 1\cdot(-e^{-y})\,dy = -(1+y)e^{-y} + \int e^{-y}\,dy$$

$$= -(1+y)e^{-y} - e^{-y} = -(2+y)e^{-y} = -\frac{2+y}{e^{y}} = \underline{\underline{-\frac{2+\ln(1+x)}{1+x}}}$$

Variante: Substitution $y := 1 + \ln(1+x)$

$$\rightsquigarrow \frac{dx}{1+x} = dy \quad \text{und} \quad 1+x = e^{y-1}$$

$$\int \frac{1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{y}{e^{y-1}}\,dy = \int \underbrace{y}_{\text{abl.}} \cdot \underbrace{e^{1-y}}_{\text{int.}}\,dy$$

$$\overset{(\text{p.I.})}{=} y \cdot (-e^{1-y}) - \int 1 \cdot (-e^{1-y})\,dy$$

$$= -y \cdot e^{1-y} + \int e^{1-y}\,dy = -y \cdot e^{1-y} - e^{1-y} = -(1+y)e^{1-y}$$

$$= -\frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$$

Variante: Substitution $y := 1+x$

$$\rightsquigarrow dx = dy \;,\quad x = y-1$$

$$\int \frac{1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{1+\ln y}{y^2}\,dy = \int \underbrace{y^{-2}}_{\text{int.}} \cdot \underbrace{(1+\ln y)}_{\text{abl.}}\,dy$$

$$\overset{(\text{p.I.})}{=} -y^{-1} \cdot (1+\ln y) - \int (-y^{-1}) \cdot \frac{1}{y}\,dy = -y^{-1}(1+\ln y) + \int y^{-2}\,dy$$

$$= -y^{-1} \cdot (1+\ln y) - y^{-1} = -y^{-1} \cdot (2+\ln y) = -\frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$$

A5) (Taylor-Entwicklung)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x \ln x + \tfrac{1}{12}\, x^4 \,.$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* := 1$ das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_2 aus a) das Lagrange-Restglied $R_2(x)$ an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_2 an der Stelle $x := 2$.
Die Schranke soll die Form $|R_2(2)| \leq c$ haben für ein konkret anzugebendes $c > 0$.
Hinweis/Tipp: In $R_2(2)$ für jeden Summanden einzeln eine obere Schranke finden.

d) Begründen Sie, warum es eine Umgebung U von $x_* = 1$ gibt, so dass $f : U \to f(U)$ eine Umkehrfunktion hat.

e) Stellen Sie für die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to U$ zum Entwicklungspunkt $y_* := f(x_*) = f(1)$ das Taylor-Polynom $\tilde{T}_1 : y \mapsto \tilde{T}_1(y)$ ersten Grades auf.

(4+2+2+1+2=11 Punkte)

Lösung:

a) $f(x) = x^{1/2} - x \ln x + \frac{1}{12} x^4$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 1 \cdot \ln x - \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} + \frac{1}{3} x^3$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} - x^{-1} + x^2$

$\Rightarrow f(1) = 1 - 0 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$

$f'(1) = \frac{1}{2} - 0 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{3-6+2}{6} = -\frac{1}{6}$

$f''(1) = -\frac{1}{4} - 1 + 1 = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{T_2(x) = \frac{13}{12} - \frac{1}{6}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2}}$

b) $f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2} + x^{-2} + 2x$

$$\rightsquigarrow R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x-1)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{8}\xi^{-5/2} + \xi^{-2} + 2\xi\right) \cdot (x-1)^3 \text{ mit } \xi \text{ zwischen } 1 \text{ und } x$$

An die Tutoren: Wenn b) fehlt aber f''' unter a) berechnet wurde, muss für b) ein Punkt gegeben werden.

c) $$|R_2(1)| = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{8}\xi^{-5/2} + \xi^{-2} + 2\xi\right) \cdot \underbrace{(2-1)^3}_{=1} \qquad (*)$$

mit $1 < \xi < 2$

$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} < \xi^{-1} < 1$, somit $\xi^{-2} < 1$, $\xi^{-5/2} < 1$

also: $$(*) \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2\right) = \frac{3+40}{6 \cdot 8} = \underline{\underline{\frac{43}{48}}} \quad (\approx 0.896)$$

[Bem.: Die bestmögliche Konstante findet man, indem man das Maximum von $\xi \mapsto \frac{1}{6} f'''(\xi)$ auf $D := [1,2]$ bestimmt. Das ist gleich $\frac{1}{6} f'''(2) = \frac{1}{6}\left(\frac{3\sqrt{2}}{64} + \frac{17}{4}\right) \approx 0{,}72$.]

d) Laut a) ist $f'(1) = -\frac{1}{6} \neq 0$.

Da f' stetig, gibt es Umgebung U von $x_0 = 1$ auf der $f' < 0$. Dort ist f streng monoton fallend, somit injektiv (Surjektivität von $f: U \to f(U)$ ist trivial)

An die Tutoren: Wenn nur $f'(1) \neq 0$ dasteht kann nur $\frac{1}{2}$ Punkt gegeben werden. Es sollte noch mindestens eines der Schlüsselwörter „f' stetig" oder „f streng monoton" oder „f injektiv" vorkommen für volle Punktzahl.

e) $x_* = 1, \; y_* = f(x_*) = \frac{13}{12}$ laut a).

$$\tilde{T}_1(y) = f^{-1}(y_*) + (f^{-1})'(y_*) \cdot (y - y_*)$$

wobei $f^{-1}(y_*) = x_* = 1$

und $(f^{-1})'(y_*) = \frac{1}{f'(x_*)} = \frac{1}{f'(1)} = -6$ laut a).

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{T}_1(y) = 1 - 6 \cdot \left(y - \frac{13}{12}\right)}}$$