**KLAUSUR MATHEMATIK I+II FÜR INFORMATIKER**

Kurzweil/Kräutle

Erlangen, den 06.10.2004

Bearbeitungszeit: 120 min

**Aufgabe 1.** Sei $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen, sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}.$$

Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren von $A$ im Vektorraum $K^3$ linear unabhängig sind, und bestimmen Sie die zu $A$ inverse Matrix $A^{-1} \in K^{3\times 3}$.

(3 Punkte)

**Aufgabe 2.** Über dem Körper $K = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ bestimme man ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq 2$ mit der Eigenschaft

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = 0.$$

(3 Punkte)

**Aufgabe 3.** Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $a, b, c$ gegeben durch

$$a = (4, 4, 2), \quad b = (1, 1, 0), \quad c = (1, 1, 1).$$

Sei $U = \langle a, b, c\rangle = \operatorname{span}\{a, b, c\}$ die lineare Hülle dieser Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimme eine Orthonormalbasis von $U$.

b) Bestimme den Orthogonalraum $U^\perp$.

c) Geben Sie ein Gleichungssystem an, das $U$ als Lösungsmenge hat.

(6 Punkte)

**Aufgabe 4.** Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1 + \sin t}\, dt.$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_2$ zweiten Grades von $f$ bezüglich des Entwicklungspunktes $x_0 = 0$.
Hinweis: Das Integral braucht nicht ausgerechnet zu werden.

b) Verwenden Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades zur Berechnung eines Näherungswertes für $f(\frac{1}{10})$. Zeigen Sie durch Betrachtung des Restgliedes der Taylor-Entwicklung, dass der zugehörige Approximationsfehler nicht größer als $10^{-4}$ ist.

(5 Punkte)

**Aufgabe 5.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (k!)^2}{(2k)!}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^k$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^k}{k}$, wobei $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Hinweis: Fallunterscheidung.

(5 Punkte)

**Aufgabe 6.** Berechnen Sie die uneigentlichen/eigentlichen Riemann-Integrale

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

b) $\int\limits_0^{1} x\, f(x)\, dx$, wobei $f(x) := \int\limits_1^{x} e^{-t^3}\, dt.$

(4 Punkte)

**Aufgabe 7.** Entscheiden Sie:
Welche der folgenden Aussage(n) ist/sind äquivalent dazu, dass eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* Cauchy-Folge ist?

(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N : \ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(ii) $\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n \leq N : \ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(iii) $\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n \geq N : \ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(iv) $\exists m, n \geq N\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists \epsilon > 0 : \ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(4 Punkte)

Summe: 30 Punkte