KLAUSUR MATHEMATIK I+II FÜR INFORMATIKER

Borchers/Kräutle

Erlangen, den 09.10.2002

1)

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t^3-6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für welche $\alpha, t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = (1, \alpha^4 - 11, 2)^\top$ lösbar? Geben Sie jeweils im Falle der Lösbarkeit alle Lösungen an.

(10 Punkte)

2) Es seien $e_1 = (1,0,0)^\top$, $e_2 = (0,1,0)^\top$, $e_3 = (0,0,1)^\top$ die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(ae_1 + be_2 + e_3) \times (2e_1 + 2e_2 + 3e_3) = F$$

mit (i) $F = e_1 - e_2$, (ii) $F = e_1 + e_2$.

(8 Punkte)

3) Ermitteln Sie alle komplexen Zahlen $z = x + i\,y$, die folgende Bedingungen erfüllen. Skizzieren Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $(z - 2i)\,(\bar{z} + 2i) = |z|^2$,

b) $(z^2 + 1)^2 = 1$,

c) $z^3 = -8\,i$.

Insbesondere bei c) stellen Sie die Lösungen in der Form $a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, dar.

(10 Punkte)

4) Bestimmen Sie für jedes $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis des Nullraums der Matrix

$$A_{\alpha,\lambda} = \begin{pmatrix} -\lambda + \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\lambda - \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Normieren Sie alle vom Nullvektor verschiedenen Basisvektoren auf die euklidische Länge 1, berechnen Sie die Skalarprodukte dieser Vektoren und skizzieren Sie sie.
<u>Hinweis:</u> Zur schnelleren Berechnung stelle man die Komponenten der Matrix bzw. der normierten Vektoren in Abhängigkeit von Sinus- und Kosinusfunktionen des *einfachen* Winkels α dar.

(10 Punkte)

5) Bestimmen Sie in $x > 0$ die erste Ableitung folgender Funktionen ($\alpha \in \mathbb{R}$):

a) $(x^x)^x$ b) $x^{(x^\alpha)}$ c) $\int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{\cos t}\,dt$

(6 Punkte)

6) Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen (mittels Substitution oder partieller Integration):

a) $\int\limits_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$, b) $\int\limits^x t^9 \ln t\, dt$, c) $\int\limits_0^2 (x-1)\, e^{(x-1)^2}\, dx$,

d) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}e^x}\, e^x\, dx$, e) $\int\limits_0^a \sinh x \cosh x\, dx$, f) $\int\limits_0^{2\pi} F(x) \cos x\, dx$ mit $F(x) = \int\limits_0^{x^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt.$

(12 Punkte)

7) Bestimmen Sie, ggf. mit der Regel von l'Hospital, folgende Grenzwerte:

a) (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x-\sin x}{x^3}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin\frac{x}{2}}{x+\cos x}$ (5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)}{x-x_0}$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

b) Berechnen Sie

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}\, \left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-k}$

(3) Zeigen Sie, dass die Reihe $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ konvergiert, indem Sie die Partialsummen betrachten und den Bruch so zerlegen, dass sich eine Teleskop-Summe ergibt. Berechnen Sie den Grenzwert.

(12+10 Punkte)

8)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \qquad (x<2)$$

für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe aus a).

c) Zeigen Sie durch Abschätzung des Restgliedes, dass an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ die Taylorreihe gegen den Funktionswert von f konvergiert.

<u>Hinweis:</u> Zur Restgliedabschätzung verwenden Sie $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \leq 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n.$

(12 Punkte)

9) Eine zylindrische Fischdose der Höhe h, deren Grundfläche aus zwei Halbkreisen mit Radius r und einem dazwischen liegenden Quadrat mit Seitenlänge $2r$ zusammengesetzt ist, soll ein bestimmtes vorgegebenes Volumen V besitzen. In welchem Verhältnis muss die Höhe h zum Radius r gewählt werden, damit die Materialkosten (Oberfläche der Dose inklusive Boden und Deckel) minimal werden?

(10 Punkte)

Summe: 100 Punkte