LÖSUNGEN
KLAUSUR MATHEMATIK I+II FÜR INFORMATIKER
Borchers/Kräutle
Erlangen, den 09.10.2002

1)

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t^3-6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für welche $\alpha, t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = (1, \alpha^4 - 11, 2)^\top$ lösbar? Geben Sie jeweils im Falle der Lösbarkeit alle Lösungen an.

(10 Punkte)

Lösung: a) Z.B. Entwicklung nach der letzten Spalte:

$$\det A = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (t^3-6) \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - (t^3-6)(-1) - 3 = t^3 - 8$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t^3-6 & \alpha^4-11 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & t^3-8 & \alpha^4-13 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & t^3-8 & \alpha^4-13 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t^3-8 & \alpha^4-16 \end{array}\right)$$

Gleichungssystem ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow t^3 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 2, \alpha \in \mathbb{R}$. Die Lösung lautet dann:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - \frac{\alpha^4-16}{t^3-8} \\ -1 \\ \frac{\alpha^4-16}{t^3-8} \end{pmatrix} \right\}$$

Falls $t = 2$ und $\alpha^4 - 16 = 0$ (d.h. $\alpha = \pm 2$):

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3-c \\ -1 \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Falls $t = 2$ und $\alpha \neq \pm 2$:
$L = \emptyset$

2) Es seien $e_1 = (1,0,0)^\top$, $e_2 = (0,1,0)^\top$, $e_3 = (0,0,1)^\top$ die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(ae_1 + be_2 + e_3) \times (2e_1 + 2e_2 + 3e_3) = F$$

mit (i) $F = e_1 - e_2$, (ii) $F = e_1 + e_2$.

(8 Punkte)

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b-2 \\ -3a+2 \\ 2a-2b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} F$$

Für $F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $3b = 3, -3a = -3, a - b = 0 \Leftrightarrow a = b = 1$

Für $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $3b = 3, -3a = -1, a - b = 0 \Leftrightarrow$ keine Lösung

3) Ermitteln Sie alle komplexen Zahlen $z = x + i\,y$, die folgende Bedingungen erfüllen. Skizzieren Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $(z - 2i)\,(\bar{z} + 2i) = |z|^2$,

b) $(z^2 + 1)^2 = 1$,

c) $z^3 = -8\,i$.

Insbesondere bei c) stellen Sie die Lösungen in der Form $a+bi$, $a, b\in\mathbb{R}$, dar.

(10 Punkte)

Lösung:
a)
1. Variante: $(z-2i)(\bar{z}+2i) = (z-2i)(\overline{z-2i}) = |z-2i|^2 \stackrel{!}{=} |z|$, also $\operatorname{dist}(z,0) = \operatorname{dist}(z,2i)$
$\overset{\text{geom. Überl.}}{\Longrightarrow}$ $L = \{a + i \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ (Gerade durch i parallel zur Re-Achse)
2. Variante: Ansatz $z = a + bi$.

$$\begin{aligned} (a+bi-2i)(a-bi+2i) &= a^2+b^2 \\ \Leftrightarrow a^2+(b-2)^2 &= a^2+b^2 \\ \Leftrightarrow b-2 &= \pm b \\ \Leftrightarrow b-2 &= -b \\ \Leftrightarrow b &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (z^2+1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow z^2+1 &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow z^2 = 0 &\quad\vee\quad z^2 = -2 \\ \Leftrightarrow z = 0 \vee z = -i\sqrt{2} \vee z = i\sqrt{2} & \\ & L = \{0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\} \end{aligned}$$

c) $z^3 = -8i = 2^3 e^{2\pi i \frac{3}{4}}$
$\Rightarrow$
$z_1 = 2\,e^{2\pi i/4} = 2i$
$z_2 = z_1\,e^{2\pi i/3} = 2\,e^{2\pi i\frac{7}{12}}$
$z_3 = z_2\,e^{2\pi i/3} = 2\,e^{2\pi i\frac{11}{12}}$

geom. Überlegung (gleichseitige Dreiecke): $z_2 = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2})$, $z_3 = 2(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2})$
$L = \{2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}$

4) Bestimmen Sie für jedes $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis des Nullraums der Matrix

$$A_{\alpha,\lambda} = \begin{pmatrix} -\lambda + \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\lambda - \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Normieren Sie alle vom Nullvektor verschiedenen Basisvektoren auf die euklidische Länge 1, berechnen Sie die Skalarprodukte dieser Vektoren und skizzieren Sie sie.
<u>Hinweis:</u> Zur schnelleren Berechnung stelle man die Komponenten der Matrix bzw. der normierten Vektoren in Abhängigkeit von Sinus- und Kosinusfunktionen des *einfachen* Winkels α dar.

(10 Punkte)

Lösung: Ob der Nullraum nichttrivial ist, prüft man mittels der Determinante (Anmerkung: Die Aufgabe ist offenbar gleichbedeutend damit, Eigenwerte und Eigenräume der Matrix $A_{\alpha,0}$ zu bestimmen. Dazu würde man genau so vorgehen.)

$$\det(A_{\alpha,\lambda}) = (-\lambda + \cos 2\alpha)(-\lambda - \cos 2\alpha) - \sin^2 2\alpha = \lambda^2 - \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \lambda^2 - 1$$

$$\det(A_{\alpha,\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Es folgt: Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist der Nullraum$= \{0\}$.
Für $\lambda = -1$ bestimme Nullraum, verwende $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha, \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$:

$$A_{\alpha,-1} = \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 1 - \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 2\sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

Statt Gauss-Algorithmus (Fallunterscheidungen!) ist es am einfachsten folgendermaßen:

$$A_{\alpha,-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} 2\cos\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = 0 \\ 2\sin\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = 0 \end{array}$$

Falls $\cos\alpha = 0$, so ist $\sin\alpha \neq 0$, also muss dann (also in jedem Fall) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$ gelten, also
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $\quad c \in \mathbb{R}$ (Eigenraum).
Normierung: $c = 1$.
Für $\lambda = 1$ bestimme Nullraum:

$$A_{\alpha,1} = \begin{pmatrix} -1 + \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -1 - \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -2\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$A_{\alpha,1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} 2\sin\alpha(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0 \\ 2\cos\alpha(x\sin\alpha - y\cos\alpha) = 0 \end{array} \Leftrightarrow x\sin\alpha = y\cos\alpha$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $\quad c \in \mathbb{R}$ (Eigenraum).
Normierung: $c = 1$.

Geometrische Deutung: Beide gefundenen Eigenvektoren stehen offenbar senkrecht zueinander. $A_{\alpha,\lambda}$ lässt den Eigenvektor zum Eigenwert 1 unverändert und spiegelt den Eigenvektor zum Eigenwert -1. $A_{\alpha,\lambda}$ ist daher eine Spiegelung an der Ursprungsgeraden, die vom Eigenvektor $(\cos\alpha, \sin\alpha)^\top$ erzeugt wird.

5) Bestimmen Sie in $x>0$ die erste Ableitung folgender Funktionen ($\alpha\in\mathbb{R}$):

a) $(x^x)^x$ b) $x^{(x^\alpha)}$ c) $\int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{\cos t}\,dt$

(6 Punkte)

Lösung:

a) $(x^x)^x = e^{\ln((x^x)^x)} = e^{x\ln x^x} = e^{x^2\ln x}$,
$[(x^x)^x]' = e^{x^2\ln x}(2x\ln x + x) = (x^x)^x x(1+2\ln x)$

b) $x^{(x^\alpha)} = e^{\ln x^{(x^\alpha)}} = e^{x^\alpha \ln x}$
$[x^{(x^\alpha)}]' = e^{x^\alpha\ln x}(\alpha x^{\alpha-1}\ln x + x^\alpha \frac{1}{x}) = x^{(x^\alpha)}x^{\alpha-1}(1+\alpha\ln x)$ für $\alpha\neq 0$
[$(x^{(x^0)})' = x' = 1$ für $\alpha = 0$]

c) $\left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{\cos t}\,dt\right)' = e^{\cos\sqrt{x}}(x^{1/2})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\cos\sqrt{x}}$

6) Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen (mittels Substitution oder partieller Integration):

a) $\int\limits_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$, b) $\int\limits^x t^9\,\ln t\,dt$, c) $\int\limits_0^2 (x-1)\,e^{(x-1)^2}\,dx$,

d) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}e^x}\,e^x\,dx$, e) $\int\limits_0^a \sinh x\,\cosh x\,dx$, f) $\int\limits_0^{2\pi} F(x)\,\cos x\,dx$ mit $F(x) = \int\limits_0^{x^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

(12 Punkte)

Lösung:

a) $\int\limits_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int\limits_0^\pi \sin y\,dy = -\cos y|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$

b) $\int x^9\ln x\,dx \overset{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{10}\,x^{10}\ln x - \int\frac{1}{10}x^{10}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{10}\,x^{10}\ln x - \frac{1}{100}\,x^{10} + \text{const}$

c) 1. Möglichkeit: Integrand ist eine um 1 verschobene, ungerade Funktion $\Rightarrow$ Integral$=0$
2. Möglichkeit: $\int\limits_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \frac{1}{2}\int\limits_1^1 e^y\,dy = 0$

d) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}e^x}\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int\limits_1^e e^{-\frac{1}{2}y}\,dy = -2\,e^{-\frac{1}{2}y}|_1^e = -2\,e^{-\frac{1}{2}e} + 2e^{-\frac{1}{2}}$

e) $\int\limits_0^a \sinh x\cosh x\,dx \overset{\text{p.I.}}{=} \cosh^2 x|_0^a - \int\limits_0^a \cosh x\sinh x\,dx \Rightarrow 2\int\limits_0^a \sinh x\cosh x\,dx = \cosh^2 a - 1 = \sinh^2 a$

f) 1. Möglichkeit: $\int\limits_0^{2\pi} \cos x\,F(x)\,dx \overset{\text{p.I.}}{=} \sin xF(x)|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \sin x\,2x\,\frac{\sin x}{x}\,dx = -2\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = -2\pi$

2. Möglichkeit: $F(x) \overset{\text{Subst.}}{=} 2\int\limits_0^x \sin y\,dy = -2\cos y|_0^x = -2\cos x + 1 \Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} \cos x\,F(x)\,dx = -\int\limits_0^{2\pi} 2\cos^2 x\,dx + \int\limits_0^{2\pi} \cos x\,dx = -2\pi + \sin x|_0^{2\pi} = -2\pi$

7) Bestimmen Sie, ggf. mit der Regel von l'Hospital, folgende Grenzwerte:

a) (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x-\sin x}{x^3}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin\frac{x}{2}}{x+\cos x}$ (5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)}{x-x_0}$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

b) Berechnen Sie

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}\,\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-k}$

(3) Zeigen Sie, dass die Reihe $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ konvergiert, indem Sie die Partialsummen betrachten und den Bruch so zerlegen, dass sich eine Teleskop-Summe ergibt. Berechnen Sie den Grenzwert.

(12+10 Punkte)

Lösung:

a) (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} \overset{\text{stet.}}{=} e^{\lim \frac{\ln x}{x}} \overset{\text{Hosp.}}{=} e^{\lim \frac{1}{x}} = 1$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+\sin\frac{x}{2}}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{\sin x/2}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = \frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x/2}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}} = 2$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$

(6) (man kann auch substituieren $h := x - x_0$ und $h \to 0$ betrachten)
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)(x-x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)(x-x_0)+f'(x)-f'(x)}{2(x-x_0)} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{2} f''(x) = \frac{1}{2} f''(x_0)$

b) (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}\,(1-\frac{3}{n})^{2n} = \lim \sqrt[n]{2}\, \lim \sqrt[n]{n}\, [\lim(1-\frac{3}{n})^n]^2 = 1\cdot 1\cdot (e^{-3})^2 = e^{-6}$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$

(3) Ansatz: $\frac{1}{4k^2-1} = \alpha\,\frac{1}{2k-1} + \beta\,\frac{1}{2k+1}$
$\Leftrightarrow 1 = \alpha(2k+1) + \beta(2k-1) \Leftrightarrow 1 = \alpha - \beta \vee 0 = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1/2}{2k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k+1} = \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

8)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \qquad (x<2)$$

für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe aus a).

c) Zeigen Sie durch Abschätzung des Restgliedes, dass an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ die Taylorreihe gegen den Funktionswert von f konvergiert.

<u>Hinweis:</u> Zur Restgliedabschätzung verwenden Sie $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) \leq 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n$.

(12 Punkte)

Lösung: a)

$f(x) = (2-x)^{-1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(2-x)^{-3/2}$

$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}(2-x)^{-5/2}$

$...\ f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n}(2-x)^{-\frac{2n+1}{2}} \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

$f^{(n)}(0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^{2n+\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow T_{f,0}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^{2n+\frac{1}{2}}\, n!}\, x^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n+1)\, 2^{2n+\frac{1}{2}}\, n!}{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1) 2^{2n+\frac{1}{2}+2}(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4(n+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 2$

c) Nach dem Satz von Taylor gibt es ein $\xi = \xi_n \in [0, 1/2]$ so dass das Restglied die Form hat

$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n n!}(2-\xi)^{-n-\frac{1}{2}}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Mittels Hinweis lässt sich der erste Bruch durch 1 abschätzen:

$|R_n| \leq \frac{1}{2^n(2-\xi)^{n+\frac{1}{2}}}$

Da $2-\xi \geq 1$: $\quad |R_n| \leq \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ Beh.

9) Eine zylindrische Fischdose der Höhe h, deren Grundfläche aus zwei Halbkreisen mit Radius r und einem dazwischen liegenden Quadrat mit Seitenlänge $2r$ zusammengesetzt ist, soll ein bestimmtes vorgegebenes Volumen V besitzen. In welchem Verhältnis muss die Höhe h zum Radius r gewählt werden, damit die Materialkosten (Oberfläche der Dose inklusive Boden und Deckel) minimal werden?

(10 Punkte)

Lösung:

Volumen: $V = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = (\pi r^2 + 4r^2)h = r^2 h(\pi + 4)$

Oberfläche: $O = 2 \times \text{Boden} + \text{Mantel} = 2[(2r)^2 + \pi r^2] + (4r + 2\pi r)h = 2r^2(4+\pi) + rh(4+2\pi)$

Dass das Volumen fest vorgegeben ist, kann man dazu benutzen, um h in der Formel für die Oberfläche zu eliminieren:

$h = \frac{V}{r^2(\pi+4)} \Rightarrow O = O(r) = 2r^2(4+\pi) + \frac{V}{r(4+\pi)}(4+2\pi)$

Minimierung dieser Funktion:

$O'(r) = 4r(4+\pi) - \frac{V}{r^2}\frac{4+2\pi}{4+\pi} \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 4r^3(4+\pi) = V\,\frac{4+2\pi}{4+\pi} \Leftrightarrow r^3 = V\,\frac{2+\pi}{2(4+\pi)^2}$

$\Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{V}{r^3(\pi+4)} = \frac{2(4+\pi)}{2+\pi}$

Summe: 100 Punkte