LÖSUNGSVORSCHLAG
KLAUSUR MATHEMATIK I+II FÜR INFORMATIKER

Kurzweil/Kräutle

Erlangen, den 06.10.2004

Bearbeitungszeit: 120 min

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen, sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}.$$

Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren von A im Vektorraum K^3 linear unabhängig sind, und bestimmen Sie die zu A inverse Matrix $A^{-1} \in K^{3\times 3}$.

(3 Punkte)

Lösungsvorschlag: Es wird der Gauß-Algorithmus zur Bestimmung der Inversen verwendet. Die Zeilen (sowie die Spalten) von A sind genau dann linear unabhängig, wenn der Gauß-Algorithmus A in die Einheitsmatrix umwandelt ohne abzubrechen. Die Lineare Unabhängigkeit braucht also nicht gesondert untersucht zu werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Aufgabe 2. Über dem Körper $K = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ bestimme man ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad ≤ 2 mit der Eigenschaft

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = 0.$$

(3 Punkte)

Lösungsvorschlag: Ansatz: $P(X) = a + bX + cX^2$ mit $a, b, c \in K$. Einsetzen von $X = 0, 1, 2$ liefert das Gleichungssystem

$$a = 1, \quad a + b + c = 2, \quad a + 2b + c = 0.$$

Eliminierung von a: $\Rightarrow b + c = 1,\ \ 2b + 4c = 2$
$\Longrightarrow c = 0,\ b = 1$
$\Longrightarrow P(X) = 1 + X$

Aufgabe 3. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren a, b, c gegeben durch

$$a = (4, 4, 2), \quad b = (1, 1, 0), \quad c = (1, 1, 1).$$

Sei $U = \langle a, b, c\rangle = \operatorname{span}\{a, b, c\}$ die lineare Hülle dieser Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimme eine Orthonormalbasis von U.

b) Bestimme den Orthogonalraum $U^\perp$.

c) Geben Sie ein Gleichungssystem an, das U als Lösungsmenge hat.

(6 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a)
- Eine 'schnelle' Lösung: Anhand der ersten beiden Komponenten der drei Vektoren sieht man, dass a, b, c linear abhängig sind. Man sieht, dass sich z.B. a durch die beiden anderen Vektoren darstellen lässt: $a = 2(b + c)$.
  Also $\operatorname{span}\{a, b, c\} = \operatorname{span}\{b, c\}$.
  Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren für $\{b, c\}$:

$$v_1 = \frac{1}{\|b\|}\, b = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1, 0),$$

$$\tilde{v}_2 = c - [c, b]\, b = (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

$$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|}\, \tilde{v}_2 = (0, 0, 1)$$

  Lösung: $\{v_1, v_2\}$
  (Stattdessen kann man auch das Schmidt'sche Verfahren auf a, b, c anwenden.)
- Die 'Standard-Lösung' durch stures Anwenden des Orthogonalisierungsverfahrens auf $\{a, b, c\}$:

$$\|a\| = 6, \quad v_1 := \frac{1}{\|a\|}\, a = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_2 := b - [b, v_1]\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$v_2 := \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|}\, \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_3 := c - [c, v_1]\, v_1 - [c, v_2]\, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{18} \cdot (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow$ Abbruch des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren. Das bedeutet, dass $c \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \operatorname{span}\{a, b\}$. Damit ist $\{v_1, v_2\}$ eine Orthonormalbasis des gesuchten Raums.

b) Der Orthogonalraum hat die Dimension $\dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim U = 1$. Es reicht also, einen erzeugenden Vektor zu finden.
Eine Möglichkeit: Man 'sieht', dass $(1, -1, 0)$ orthogonal auf v_1 und v_2 steht, also $U^\perp = \operatorname{span}\{(1, -1, 0)\}$.

Oder man wählt einen beliebigen Vektor, der nicht in U liegt, z.B. $x = (1, 0, 0)$, und wendet das Schmidt'sche Verfahren auf $\{v_1, v_2, x\}$ an, d.h. man bestimmt

$$v_3 = x - \langle x, v_1 \rangle\, v_1 - \langle x, v_2 \rangle\, v_2; \quad U^\perp = \mathrm{span}\{v_3\}.$$

Wer das sog. Vektorprodukt (Kreuzprodukt) kennt, kann auch dieses zur Berechnung eines orthogonalen Vektors zu a und b benutzen.

c) Der Raum U ist dadurch charakterisiert, dass alle $x \in U$ orthogonal zu dem erzeugenden Vektor $(1, -1, 0) \in U^\perp$ sind. Also hat die Gleichung

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0,$$

also

$$x_1 - x_2 = 0,$$

die Lösungsmenge U.

Aufgabe 4. Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1 + \sin t}\, dt.$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades von f bezüglich des Entwicklungspunktes $x_0 = 0$.
<u>Hinweis:</u> Das Integral braucht nicht ausgerechnet zu werden.

b) Verwenden Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades zur Berechnung eines Näherungswertes für $f(\frac{1}{10})$. Zeigen Sie durch Betrachtung des Restgliedes der Taylor-Entwicklung, dass der zugehörige Approximationsfehler nicht größer als 10^{-4} ist.

(5 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + \sin x)^{1/3}, \\ f''(x) &= \frac{1}{3}(1 + \sin x)^{-2/3} \cos x, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = \frac{1}{3}.$$

$$\Longrightarrow T_2(x) = f(0) + f'(0)\, x + f''(0)\, \frac{x^2}{2!} = x + \frac{x^2}{6}$$

b) Näherungswert: $T(0.1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{600} = \frac{61}{600}$ Abschätzung des Approximationsfehlers, d.h. des Restgliedes:

$$f'''(x) = -\frac{2}{9}\,(1+\sin x)^{-5/3}\,\cos^2 x - \frac{1}{3}\,(1+\sin x)^{-2/3}\,\sin x,$$

$$R = f'''(\xi)\,\frac{x^3}{3!} = -\left(\frac{2}{9}\,\frac{\cos^2\xi}{(1+\sin\xi)^{5/3}} + \frac{1}{3}\,\frac{\sin\xi}{(1+\sin\xi)^{2/3}}\right)\frac{10^{-3}}{6},$$

wobei $\xi \in [0, \frac{1}{10}]$.
Wenn man im Zähler $|\cos\xi| \leq 1$, $|\sin\xi| \leq 1$, und im Nenner $1+\sin\xi \geq 1$ verwendet, kann man abschätzen:

$$|R| \leq \left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}\right)\frac{10^{-3}}{6} = \frac{5}{54}\,10^{-3} \leq 10^{-4}.$$

Wenn man den Sinus im Zähler durch $\sin\xi \leq \xi \leq 0.1$ abschätzt, bekommt man sogar

$$|R| \leq \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{30}\right)\frac{10^{-3}}{6} = \frac{23}{540}\,10^{-3} \leq 10^{-4}.$$

(Bemerkung: $|R|$ zu betrachten statt R ist wichtig, denn: Das Restglied R ist offensichtlich negativ. Daher trivialerweise $\leq 10^{-4}$.)

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (k!)^2}{(2k)!}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^k$

c) $f(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^k}{k}$, wobei $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Hinweis: Fallunterscheidung.

(5 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Quotientenkriterium: $a_k = \frac{2^k (k!)^2}{(2k)!}$,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2^{k+1}\,(k+1)!^2\,(2k)!}{2^k\,(2k+2)!\,(k!)^2} = \frac{2\,(k+1)^2}{(2k+1)\,(2k+2)} = \frac{k+1}{2k+1}$$

also

$$\lim_{k\to}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{2}$$

Da dies < 1 ist, folgt die Konvergenz der Reihe.
Bemerkung: Wenn jemand nur schreibt, dass $|a_{k+1}/a_k| < 1$ für fast alle k, so reicht das *nicht* als Begründung für die Konvergenz der Reihe! "... $\leq q < 1$" ist erforderlich!)

b) Wurzelkriterium: $a_k = 1/k^k$,

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ Reihe konvergent.

c) Versucht man das Quotientenkriterium, so hat man

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |\sin x| \, \frac{k+1}{k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} |\sin x|$$

Falls $|\sin x| < 1$, also falls $|x| < \pi/2$, so ist nach dem Quotientenkriterium die Reihe konvergent. Für die Fälle $\sin x = \pm 1$ ist nach dem Q'kriterium keine Entscheidung möglich. Hier hilft es, sich an die Vorlesung zu erinnern:
Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin x = 1$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent (vgl. Skript Bsp. 9.27).
Für $x = -\frac{\pi}{2}$ ist $\sin x = -1$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist nach dem Leibniz'schen Kriterium konvergent (vgl. Bsp. 9.30).

Aufgabe 6. Berechnen Sie die uneigentlichen/eigentlichen Riemann-Integrale

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

b) $\int\limits_0^1 x \, f(x) \, dx$, wobei $f(x) := \int\limits_1^x e^{-t^3} \, dt.$

(4 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Per Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals ist

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = \lim_{a\to 0} \int\limits_a^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx.$$

Standardweg: Substitution $y := \sin x$ liefert

$$\lim_{a\to 0} \int\limits_a^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx \quad = \quad \lim_{a\to 0} \int\limits_{\sin a}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{y}\,\Big|_{\sin a}^{1} = \lim_{a\to 0} 2\,(1 - \sqrt{\sin a}) = 2$$

Man kann stattdessen auch $y := \sqrt{\sin x}$ substituieren.
Ein oder zwei Leute haben den folgenden ganz anderen Weg, der ebenfalls möglich ist, gewählt: Partielle Integration liefert, da $\int \cos \, dx = \sin$ und $(1/\sqrt{\sin x})' = -\frac{1}{2}(\sin x)^{-3/2} \cos x$:

$$\int\limits_a^{\pi/2} \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \, dx = \sin x \cdot (\sin x)^{-1/2} \,\Big|_a^{\pi/2} + \int\limits_a^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin x \cdot (\sin x)^{-3/2} \cos x \, dx$$

Der rechte Term ist nun - bis auf den Faktor 1/2 - identisch mit dem gesuchten Integral auf der linken Seite. Bringt man diesen Term also auf die linke Seite, so bekommt man

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = (\sin x)^{1/2}\,|_a^{\pi/2} = 1 - \sin a \longrightarrow 1,$$

dann Multiplikation mit 2.

b) Partielle Integration liefert, da $f'(x) = e^{-x^3}$:

$$\int\limits_0^1 x\, f(x)\, dx, \;= \frac{x^2}{2}\, f(x)\,|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\, f'(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\, f(1) - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\, e^{-x^3}\, dx,$$

wobei $f(1) = 0$. Substitution $y := x^3$ liefert

$$-\int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\, e^{-x^3}\, dx, \;= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 e^{-y}\, dy = \frac{1}{6}\, e^{-y}\,|_0^1 = \frac{1}{6}\,(e^{-1} - 1)$$

Aufgabe 7. Entscheiden Sie:
Welche der folgenden Aussage(n) ist/sind äquivalent dazu, dass eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* Cauchy-Folge ist?

(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N :\ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(ii) $\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n \leq N :\ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(iii) $\exists \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m, n \geq N :\ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(iv) $\exists m, n \geq N\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists \epsilon > 0 :\ |x_m - x_n| \geq \epsilon$

(4 Punkte)

Lösung: (iii) ist wahr, alle anderen falsch. Das reichte uns als Antwort. Wenn man die Lösung noch begründen möchte:
Man schreibt sich die Cauchy-Eigenschaft in Quantoren-Schreibweise hin, zur Negation wandelt man $\forall$-Quantoren in $\exists$-Quantoren um und umgekehrt, und aus $< \epsilon$ wird negiert $\geq \epsilon$, dann bekommt man genau Aussage (iii). Nur dies war zur Beantwortung der Frage erwartet worden. Darüber hinaus kann man noch begründen, warum die anderen Aussagen nicht in Frage kommen:

Die Aussagen (i), (ii), (iv) haben weder etwas mit der Cauchy-Eigenschaft noch mit der Negation der Cauchy-Eigenschaft zu tun:
(iv) ist formal inkorrekt ("sinnlos"), da die Variable N verwendet wird, bevor sie durch einen Quantor spezifiziert wird. (Die Reihenfolge von Quantoren ist grundsätzlich wichtig!).
(i) ist für überhaupt keine Folge erfüllt (wähle einfach $m = n \geq N$, dann ist $|x_m - x_n| = 0 < \epsilon$ statt $\geq \epsilon$, egal wie die Folge aussieht), kann also nicht mit der Cauchy-Eigenschaft und ihrer Negation zu tun haben.

Bei (ii) kann man mal $N = 1$ wählen, dann muss $m = n = 1$ sein. (ii) besagt also insbesondere, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $|x_1 - x_1| \geq \epsilon$ gilt. Das ist ebenfalls für keine Folge erfüllt.

Summe: 30 Punkte