KLAUSUR MATHEMATIK I+II FÜR INFORMATIKER

Borchers/Kräutle

Erlangen, den 26.03.2003

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2t & t^2-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Determinante der Matrix A.

b) Für welche $\alpha, t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar?

c) Bestimmen Sie diejenigen $\alpha, t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem aus b) mehrdeutig lösbar ist, und geben Sie die Lösungsmenge für diese Fälle an.

(12 Punkte)

Aufgabe 2.

a) Ist die Gleichung

$$x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

lösbar? Bestimmen Sie ggf. alle Lösungen.

b) Geben Sie ein notwendiges Kriterium für $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ an, damit die allgemeinere Gleichung

$$x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

in x lösbar ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 3.

a) Ermitteln Sie alle komplexen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen. Geben Sie die Lösungen jeweils in der Form $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, an.

(i) $4z^4 = -1$,

(ii) $e^{z^2} = 1$,

(iii) $z^2 + 1 = z\,\mathrm{Im}(z^3 \bar{z}^3)$ $\qquad$ ($\bar{z}$ = das Konjugiert-Komplexe von z)

b) Bestimmen Sie diejenigen Polynome P vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, für die

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(i) = 0$$

gilt.

(12 Punkte)

Aufgabe 4. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bzgl. der kanonischen Basis $e_1 = (1,0,0)^\top, e_2 = (0,1,0)^\top, e_3 = (0,0,1)^\top$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die dieser Abbildung zugeordnete Matrix A' bzgl. der Basis (im Bild- und Urbildraum)

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 5.

a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}(-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{k!}\, x^k$, b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k x^k$, c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}\, \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ konvergiert, indem Sie die Partialsummen betrachten und den Bruch so als Differenz schreiben, dass sich eine Teleskop-Summe ergibt. Berechnen Sie den Grenzwert.

(9 Punkte)

Aufgabe 6. Berechnen Sie die folgenden Integrale (mittels Substitution oder partieller Integration):

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x\, e^{\sin^2 x}\, dx$, b) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\, \sin^2 x\, dx$

c) $\int\limits_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)\, dx$, d) $\int\limits_0^{1} 6\, x\, F(x)\, dx$ wobei $F(x) = \int\limits_x^1 e^{-t^3}\, dt$

Hinweis zu c): zweimal partielle Integration

(9 Punkte)

Aufgabe 7.

a) Sei $f(x,y) = \frac{\cos^2(x-y)\sin^2(x-y)}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,-x)$.

b) Sei die Funktionenfolge (f_n) definiert durch $f_n(x) = \ln((1+\frac{x}{n})^n + \frac{x^2}{\sqrt[n]{n!}})$. Berechnen Sie die Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie mit der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte:

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^5-32}$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\, \ln x$ (5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(6) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\, (f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h))$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

(18 Punkte)

Siehe Rückseite!

Aufgabe 8.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 zweiten Grades der Funktion

$$f(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \cos(t^3)\,dt$$

für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Schranke $S > 0$, so dass

$$|T_2(x) - f(x)| \leq S \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \frac{1}{10}.$$

Hinweis: Restgliedabschätzung

(10 Punkte)

Aufgabe 9. Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktionswerte auf dem Kreisrand mit Radius $r = 5$ und Mittelpunkt im Ursprung für die Funktion $f(x, y) = x^2y^2$. Geben Sie alle Punkte (x, y) an, in denen die Extrema angenommen werden.

(10 Punkte)

Summe: 100 Punkte

Viel Erfolg!