KLAUSUR MATHEMATIK I+II FÜR INFORMATIKER

Kurzweil

Erlangen, den 30.03.2005

Bearbeitungszeit: 120 min

Aufgabe 1. Es seien die Vektoren $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Normieren Sie v_1, v_2, und ergänzen Sie sie zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei U die Ebene im $\mathbb{R}^3$, die die Punkte $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ und $(1,1,-1)$ enthält.

a) Bestimmen Sie eine Gerade G durch den Nullpunkt, die senkrecht zu U ist.

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen G und der x-Achse.

c) Bestimmen Sie eine orthogonale Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (d.h. geben Sie die zu α gehörenden orthogonalen Matrix an), welche die x-z-Ebene in die Ebene U überführt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $K = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ der Körper mit drei Elementen. Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in K^{2\times 4}$$

berechnen Sie eine Matrix $B \in K^{4\times 2}$ mit Rang $\operatorname{rg}(B) = 2$, so dass

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. In der symmetrischen Gruppe S_3 seien die Transpositionen $\tau_1 = (12)$, $\tau_2 = (13)$, $\tau_3 = (23)$ gegeben. Berechnen Sie in S_3 das Produkt $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_2$.

(2 Punkte)

Aufgabe 5.

a) Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ an, die die Gleichung

$$z^4 = (2+i)^4$$

erfüllen.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung

$$\operatorname{Re}(z^2)\operatorname{Im}(z^2) = |z|^2 \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)$$

erfüllen.

(4 Punkte)

Aufgabe 6. Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{a)} \quad \int_1^e 36\, x^5 \, \ln x \, dx, \qquad \text{b)} \quad \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x \, \cos((\ln x)^2)}{x} \, dx$$

(4 Punkte)

Aufgabe 7.

a) Prüfen Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2}$ auf Konvergenz.

b) Prüfen Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{e^k (k!)^2}$ auf Konvergenz.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} e^{-k}$? Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert.

(7 Punkte)

Aufgabe 8.

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades zur Funktion

$$f(x) = \exp(1 - x^2)$$

bezüglich des Entwicklungspunktes $x_0 = 1$.

b) Zeigen Sie durch Untersuchung des Restgliedes, dass der Approximationsfehler, den man in Kauf nimmt, wenn man $f(x)$ durch $T_2(x)$ approximiert, an der Stelle $x = 0.99$ höchstens 10^{-5} ist:

$$|\, T_2(0.99) - f(0.99) \,| \leq 10^{-5}$$

(6 Punkte)

Summe: 35 Punkte