LÖSUNGEN
KLAUSUR MATHEMATIK I+II FÜR INFORMATIKER
('NACHKLAUSUR')
Borchers/Kräutle
Erlangen, den 26.03.2003

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2t & t^2-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Determinante der Matrix A.

b) Für welche $\alpha, t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar?

c) Bestimmen Sie diejenigen $\alpha, t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem aus b) mehrdeutig lösbar ist, und geben Sie die Lösungsmenge für diese Fälle an.

(12 Punkte)

Lösung. a) z.B. $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2t-4 & t^2-4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2t-4 & t^2-4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = t^2+2t-8$

b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn A invertierbar ist, also wenn $\det(A) \neq 0$ (dann ist $x = A^{-1}b$).
$\det(A) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm 3$. Also:
A ist invertierbar für $t \in \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig.

c) Es müssen die Fälle $t = 2$, $t = -4$ untersucht werden.
(1) Fall $t = 2$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 2 & 4 & 2 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-2\alpha \\ 0 & -1 & 1 & -2-\alpha \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ ist genau dann lösbar, wenn $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, also wenn $\alpha \in \{0, 2\}$.
(1.1) Fall $t = 2, \alpha = 0$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

(1.2) Fall $t = 2, \alpha = 2$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) Fall $t = -4$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 2 & -8 & 14 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & -12 & 12 & \alpha^2-2\alpha \\ 0 & -1 & 1 & -2-\alpha \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & -12 & 12 & \alpha^2-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -24-10\alpha-\alpha^2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ ist genau dann lösbar, wenn $24 + 10\alpha + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{-4, -6\}$
(2.1) Fall $t = -4, \alpha = -4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & -12 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

(2.2) Fall $t = -4, \alpha = -6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \alpha \\ 0 & -12 & 12 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 2.

a) Ist die Gleichung

$$x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

lösbar? Bestimmen Sie ggf. alle Lösungen.

b) Geben Sie ein notwendiges Kriterium für $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ an, damit die allgemeinere Gleichung

$$x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

in x lösbar ist.

(10 Punkte)

Lösung.
a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_3 - x_1 & = & -4 \\ x_1 - x_2 & = & 2 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Löse dieses Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R}$$

b) Ein notwendiges (übrigens auch hinreichendes) Kriterium ist:

$b \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

Aufgabe 3.

a) Ermitteln Sie alle komplexen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen. Geben Sie die Lösungen jeweils in der Form $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, an.

(i) $4z^4 = -1$,

(ii) $e^{z^2} = 1$,

(iii) $z^2 + 1 = z\,\mathrm{Im}(z^3\bar{z}^3)$ $\qquad$ ($\bar{z}$ = das Konjugiert-Komplexe von z)

b) Bestimmen Sie diejenigen Polynome P vom Grad ≤ 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, für die

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(i) = 0$$

gilt.

(12 Punkte)

Lösung.
a)
(i) $z^4 = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,e^{\pi i}$
$\Rightarrow z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{\pi i}{4} + \frac{2\pi k i}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{5\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$
$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{7\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

(ii) $e^{z^2} = 1 = e^0 = e^{0 + 2\pi i k},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z^2 = 2\pi i k,\ k \in \mathbb{Z}$
Falls $k \geq 0$: $z^2 = 2\pi k\,e^{\frac{\pi}{2}}$
$\Leftrightarrow z_1 = \sqrt{2\pi k}\,e^{\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt{2\pi k}\,e^{\frac{5\pi}{4}}$
$\Leftrightarrow z_1 = \sqrt{2\pi k}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\pi k}(1+i), \quad z_2 = -\sqrt{\pi k}(1+i)$
Falls $k < 0$: $z^2 = 2\pi|k|\,e^{\frac{3\pi}{2}}$
$\Leftrightarrow z_3 = \sqrt{2\pi|k|}\,e^{\frac{3\pi}{4}}, \quad z_4 = \sqrt{2\pi|k|}\,e^{\frac{7\pi}{4}}$
$\Leftrightarrow z_3 = \sqrt{2\pi|k|}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\pi|k|}(-1+i), \quad z_4 = \sqrt{\pi|k|}(1-i)$
Beide Fälle zusammen: $\Longrightarrow\ L = \{\sqrt{\pi k}(1+i), \sqrt{\pi k}(-1+i), \sqrt{\pi k}(1-i), \sqrt{\pi k}(-1-i) \mid k \in \mathbb{N}\}$

(iii) $z^2 + 1 = z\,\mathrm{Im}(z^3\overline{z}^3) = z\,\mathrm{Im}(|z|^3) = 0$ (da $|z| \in \mathbb{R}$)
also $z^2 = -1, \quad z = \pm i$

b) Ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit Nullstelle i hat auch Nullstelle $-i$. Aus den 3 bekannten Nullstellen ergeben sich 3 Linearfaktoren, die das Polynom enthalten muss: $(x-i), (x+i), (x-1)$.
Da der Grad auf 3 beschränkt ist, bleibt nur

$$P(x) = c\,(x-i)\,(x+i)\,(x-1) = c\,(x^2+1)\,(x-1) = c\,(x^3 - x^2 + x - 1)$$

Wegen $P(0) = 1$ folgt $c = -1$, also $P(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ ist einzige Lösung.
(Alternativer Lösungsweg: Allgemeiner Ansatz als Polynom dritten Grades, Bedingungen ausnutzen führt auf lineares Gleichungssystem für Koeffizienten)

Aufgabe 4. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bzgl. der kanonischen Basis $e_1 = (1,0,0)^\top, e_2 = (0,1,0)^\top, e_3 = (0,0,1)^\top$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die dieser Abbildung zugeordnete Matrix A' bzgl. der Basis (im Bild- und Urbildraum)

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Lösung. Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Es ist

$$e_1' = e_1 + e_2, \quad e_2' = -e_1 + e_2, \quad e_3' = e_3.$$

Die Matrix des Basiswechsels von $\{e_1, e_2, e_3\}$ nach $\{e_1', e_2', e_3'\}$ ist also

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix des Basiswechsels von $\{e_1', e_2', e_3'\}$ nach $\{e_1, e_2, e_3\}$ ist C^{-1},

$$(C|E) = C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E|C^{-1})$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow A' &= C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.

a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}(-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{k!}\, x^k$, b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \left(1+\frac{1}{k}\right)^k x^k$, c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ konvergiert, indem Sie die Partialsummen betrachten und den Bruch so als Differenz schreiben, dass sich eine Teleskop-Summe ergibt. Berechnen Sie den Grenzwert.

(9 Punkte)

Lösung.

a) (i) Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3^{-(k+1)}\, 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)\, k!}{(k+1)!\, 3^{-k}\, 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)} = \frac{2k+1}{3(k+1)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{3}{2}$

(ii) Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k(1+\frac{1}{k})^k} = \sqrt[k]{k}\,(1+\frac{1}{k}) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad\Longrightarrow\quad R = 1$

(iii) Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}(1-\frac{1}{k})^{k^2}} = \frac{1}{k}\,(1-\frac{1}{k})^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\cdot e^{-1} = 0 \quad\Longrightarrow\quad R = \infty$

b) Idee: Versuche $\frac{k}{(k+1)!}$ als $\frac{c(k)}{k!} - \frac{c(k+1)}{(k+1)!}$ zu schreiben ($\longrightarrow$Teleskopsumme!):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die folgenden Integrale (mittels Substitution oder partieller Integration):

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, e^{\sin^2 x} \, dx$, b) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} \, \sin^2 x \, dx$

c) $\int\limits_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x) \, dx$, d) $\int\limits_0^1 6\,x\,F(x)\,dx$ wobei $F(x) = \int\limits_x^1 e^{-t^3}\,dt$

Hinweis zu c): zweimal partielle Integration

(9 Punkte)

Lösung.

a)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, e^{\sin^2 x} \, dx \overset{y:=\sin^2(x)}{=} \frac{1}{2} \int\limits_0^1 e^y \, dy = \frac{1}{2} \, e^y|_0^1 = \frac{1}{2}\,(e-1)$$

b)

$$\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} \, \sin^2 x \, dx = \int\limits_0^{\pi} \cos x \, \sin^2 x \, dx \overset{y:=\sin x}{=} \int\limits_0^0 x^2 \, dx = 0$$

c)

$$\begin{aligned} \int\limits_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)\,dx &\overset{\text{p.I.}}{=} x\cos(\ln x)|_1^{e^{\pi/2}} + \int\limits_1^{e^{\pi/2}} x\sin(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx \\ &\overset{\text{p.I.}}{=} (x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x))\,|_1^{e^{\pi/2}} - \int\limits_1^{e^{\pi/2}} x\cos(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\,(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x))\,|_1^{e^{\pi/2}} = \frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$$

d)

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 6x\,F(x)\,dx &= 3x^2\,F(x)|_0^1 - \int\limits_0^1 3x^2\,F'(x)\,dx = \left[3x^2 \int\limits_x^1 e^{-t^3}\,dt\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int\limits_0^1 3x^2(-1)\,e^{-x^3}\,dx \\ &= \int\limits_0^1 3x^2\,e^{-x^3}\,dx \overset{y:=x^3}{=} \int\limits_0^1 e^{-y}\,dy = -e^{-y}|_0^1 = 1-e^{-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.

a) Sei $f(x,y) = \frac{\cos^2(x-y)\sin^2(x-y)}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,-x)$.

b) Sei die Funktionenfolge (f_n) definiert durch $f_n(x) = \ln((1+\frac{x}{n})^n + \frac{x^2}{\sqrt[n]{n!}})$. Berechnen Sie die Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie mit der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte:

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$ (3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^5-32}$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\,\ln x$ (5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(6) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \left(f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)\right)$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

(18 Punkte)

Lösung.

a) $f(x,x) = 0 \;\forall x \neq 0, \quad f(x,-x) = \frac{\cos^2 2x \sin^2 x}{2x^2} = \cos^2 2x \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \xrightarrow{x\to 0} 1 \cdot 2 \cdot 1^2 = 2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left((1+\frac{x}{n})^n + \frac{x^2}{\sqrt[n]{n!}}\right) \overset{\text{Stet.}}{=} \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{x}{n})^n + \frac{x^2}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \ln(e^x + 0) = x$

c)

(1)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{\sin x} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 2x}{\cos x} = 4$$

(3)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^5-32} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{5x^4} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 2} x^{-3} = \frac{1}{20}$$

(4)

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -2\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$$

(5)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} &\overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{2h} \\ &\overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0+h) + f''(x_0+h)}{2} = f''(x_0)\end{aligned}$$

Aufgabe 8.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_2 zweiten Grades der Funktion

$$f(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \cos(t^3)\, dt$$

für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Schranke $S > 0$, so dass

$$|T_2(x) - f(x)| \leq S \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \frac{1}{10}.$$

Hinweis: Restgliedabschätzung

(10 Punkte)

Lösung.
a)

$$\begin{array}{rcc}
f(x) & = 1 + x^2 + \int\limits_0^x \cos(t^3)\,dt & f(0) = 1 \\
f'(x) & = 2x + \cos(x^3) & f'(0) = 1 \\
f''(x) & = 2 - 3x^2 \sin(x^3) & f''(0) = 2 \\
f'''(x) & = -6x\sin(x^3) - 9x^4\cos(x^3) &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad T_2(x) = 1 + x + x^2$$

b)

$$f(x) - T_2(x) = R = \frac{f'''(\xi)\,x^3}{3!} = -(\xi\sin(\xi^3) + \frac{3}{2}\,\xi^4\cos(\xi^3))\,x^3$$

Mit $|x| \leq 10^{-1}$ folgt $|\xi| \leq 10^{-1}$ und

$$|R| \leq (|\xi| \cdot 1 + \frac{3}{2}\,\xi^4 \cdot 1)\,|x|^3 \leq \frac{5}{2}\,\xi^4 |x|^3 \leq 2.5 \cdot 10^{-7}$$

Aufgabe 9. Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktionswerte auf dem Kreisrand mit Radius $r = 5$ und Mittelpunkt im Ursprung für die Funktion $f(x, y) = x^2 y^2$. Geben Sie alle Punkte (x, y) an, in denen die Extrema angenommen werden.

(10 Punkte)

Lösung. Offensichtlich ist $f \geq 0$, und für $x = 0$ oder $y = 0$ ist $f = 0$, für alle anderen (x, y) ist $f > 0$. Das Minimum ist also $= 0$ und wird an den Stellen $(0, 5), (0, -5), (5, 0), (-5, 0)$ angenommen.
Suche nach Maxima: Aus Symmetriegründen reicht die Betrachtung des 1. Quadranten. Dort gilt auf dem Kreisrand $y = \sqrt{25 - x^2}$. f hat dort ein Maximum, wenn

$$h(x) := f(x, \sqrt{25 - x^2}) = x^2(25 - x^2)$$

ein Maximum auf $[0, 5]$ hat.
$h'(x) = 50x - 4x^3 = 4x(\frac{25}{2} - x^2) \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{\sqrt{2}}$
Inklusive der Ränder des Intervalls kommen also $x = 0, \frac{5}{\sqrt{2}}, 5$ als Extremstellen in Frage. $x = 0$ und $x = 5$ wurden bereits als Minimalstellen identifiziert. Also ist $(x, y) = (\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$ Maximalstelle, Maximum $= \frac{5^4}{4}$.
Aus Symmetriegründen gibt es 4 Maximalstellen $(\pm\frac{5}{\sqrt{2}}, \pm\frac{5}{\sqrt{2}})$.

Summe: 100 Punkte