Braindump Gloin Klausur WS 22/23

am 28.03.2023

Aufgabe 1: Wahrheitstafeln und Coq

a) Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten. Bei einem Widerspruch muss die Wahrheitstafel nicht komplett ausgefüllt werden, es genügt, die Belegungen zu benennen.

i) $(\neg A \land B) \lor (\neg B \land A) \vDash A \land B$

ii) $(A \to (A \to B)) \to \neg A \vDash \neg(A \land B)$

b) Man betrachte das folgende Beweisskript in Coq:

```
1. Require Import Classical.

2. Parameters p q: Prop.

3. Theorem b: ((p -> - ~(p -> q)) -> ~(p -> p)) -> q.
4. Proof.
5. intro A.
6. apply NNPP.
7. intro B.
8. assert (~(p -> p)) as C.
9. apply A.
10. intro D.
11. intro C.
12. apply B.
13. apply C.
14. assumption.
15. apply C.
16. intro D.
17. assumption.
18. Qed.
```

Aufgabe 2: Formalisierung *Analog zu WS 16/17*

Gegeben: $\{+/2, */2, \geq /2, istInt(x)/1, 1/0, 0/0\}$
+: Addition zweier Zahlen
$*$: Multiplikation zweier Zahlen
$\geq$: Größer gleich
$istInt(x)$: x ist eine Ganzzahl

Zur Erinnerung: Die Division ist nicht gegeben.
Für die folgenden Teilaufgaben dürfen nur die oben beschriebenen Funktionen verwendet werden. Es ist allerdings erlaubt, Zwischenformeln zu verwenden, um Lösungen von vorherigen Teilaufgaben verwenden zu können (das macht besonders bei Teilaufgabe a) Sinn).
Außerdem arbeitet jede Teilaufgabe auf ihrem jeweils angegeben Zahlenraum.
Formalisieren Sie hiermit:

a) n ist eine Primzahl (natürliche Zahlen).

b) Jede gerade Zahl, die echt größer 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen (natürliche Zahlen).

c) Zwischen zwei verschiedenen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl (reelle Zahlen).

d) n ist die Summe zweier Quadratzahlen (natürliche Zahlen).

Aufgabe 3: Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(g(y, h(y))) = f(x, g(x, z))$$

unifizierbar sind, und gegebenenfalls die mgu zu berechnen. Dabei sind x, y und z Variablen und f, g und h Funktionen.
Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe 4: Normalisierung und Resolution

a) Bringen Sie die Formel

$$\forall x.((P(x) \wedge Q(x,y)) \vee \exists y.Q(y,x)$$

zunächst in die pränexe Normalform, anschließend in die Skolemform und zum Schluss in die Skolemform mit CNF (ohne Quantoren). Geben Sie bei den Umformungen gegebenenfalls die nötigen Zwischenschritte an.
Die Umformung in die Klauselform kann aufgrund von Zeitgründen weggelassen werden.

b) Zeigen Sie durch Verwendung des in der Vorlesung behandelten prädikatenlogischen Resolutionsverfahrens, dass die im Folgenden beschriebene Klauselmenge (nicht ihre Negation!) unerfüllbar ist:

$$\begin{gathered}\{\neg Q(x), R(g(x),x)\}\\ \{\neg R(x,y), R(y,x)\}\\ \{\neg Q(x), P(x)\}\\ \{\neg Q(g(a))\}\\ \{\neg P(x), \neg R(x,y), Q(y)\}\\ \{Q(a)\}\end{gathered}$$

In der Klauselform sind x, y und z Variablen und a eine Konstante.

Aufgabe 5: Deduktion mit Fitch

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für die Formel

$$\forall x.\exists y.R(x,y) \wedge Q(y)$$

unter den Annahmen

$$\begin{gathered}\forall x \exists y R(x,y) \wedge P(y)\\ \forall x P(x) \rightarrow Q(x)\end{gathered}$$

an.

Aufgabe 6: Induktion

$\sum$ sei die Signatur $[and/2, false/0, true/0]$ und sei das $\sum$-Modell, in dem M die Menge $\{\bot, \top\}$ der binären Wahrheitswerte ist. Es gilt $\mathfrak{M}[\![false]\!] = \bot$ und $\mathfrak{M}[\![true]\!] = \top$ und für alle $x, y \in M$:

$$\mathfrak{M}[\![and]\!](x, y) = \begin{cases} \top & \text{falls } x = y = \top \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie durch Induktion über E, dass für jeden $\sum$-Term E und jede Umgebung η in $\mathfrak{M}$ gilt:

Wenn $\eta(x) = \bot$ für mindestens eine freie Variable $x \in FV(E)$, dann $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \bot$.

Die Aufgabe ist absichtlich einfacher gestellt, dafür wird mehr Wert auf Formalismen gelegt.