Theorie der Programmierung

Braindump SS 2016

Der Quelltext dieses Braindumps findet sich auf Gitlab, `https://gitlab.cs.fau.de/kissen/thprog-ss16`. Korrekturen bitte dorthin.

Aufgabe 1

Wir definieren ein Termersetzungssystem über der aus zwei binären Funktionssymbolen / und $\circ$ (in Infixnotation geschrieben) bestehenden Signatur Σ durch:

$$\begin{aligned}(a/b) \circ (a/c) &\to_0 b \circ (c/a)\\ (a \circ a)/b &\to_0 b \circ b\\ a/(b/c) &\to_0 a/(b \circ c)\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie mittels Polynomordnungen, dass das System stark normalisierend ist.
2. Ist das System konfluent? Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2

Wir erinnern an einige im λ-Kalkül definierte Funktionen:

$$\begin{aligned}len &= \lambda\, \ell.\, (zero\ \lambda\, x.\, succ)\\ cons &= \lambda\, x\, \ell.\, \lambda\, u\, f.\, fx(\ell u f)\\ nil &= \lambda u\, f.\, u\end{aligned}$$

1. Geben Sie die ersten vier $\beta\delta$-Reduktionsschritte des Terms $len(cons\ two\ nil)$ unter a) normaler und b) applikativer Reduktion an. Markieren Sie durch Unterstreichen in jedem Schritt den zu reduzierenden Redex.
2. Gegeben sei

   $$s = \text{ let } (f = \lambda; t.\ t\ 2) \text{ in } (f\ add)(len\ (f\ cons\ nil))$$

   und der Kontext

   $$\Gamma = \{2 : \mathbb{N},\ add : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ len : \forall a.\ \mathbb{L}\ a \to \mathbb{N},\ nil : \forall a.\ \mathbb{L}\ a,\ cons : \forall a.\ a \to \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a\},$$

   wobei $\mathbb{N}$ der Typ der natürlichen Zahlen und $\mathbb{L}\ a$ der Typ der Listen mit Element vom Typ a ist. Finden Sie den Prinzipialtyp $\mathrm{PT}(\Gamma; s; \alpha)$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass

$$flatten(map\ (map\ f)\ xss) = map\ f\ (flatten\ xss)$$

für alle f, xss gilt.

Aufgabe 4

Wir betrachten den Kodatentyp $IntStream$:

$$\begin{aligned}&\text{codata } IntStream \text{ where}\\ &\qquad head(Cons\ x\ xs) = x\\ &\qquad tail(Cons\ x\ xs) = xs\end{aligned}$$

mit $x \in Int$ und $x \in IntStream$.

Gegeben sind weiterhin folgende auf $IntStream$ definierte Funktionen:

$$\begin{aligned}head(alt\ a\ b) &= a\\ tail(alt\ a\ b) &= alt\ b\ a\\ head(const\ i) &= i\\ tail(const\ i) &= const\ i\\ head(s \boxplus t) &= (head\ s) \boxplus (head\ t)\\ tail(s \boxplus t) &= (tail\ s) \boxplus (tail\ t)\\ head(psum\ s) &= s\\ tail(psum\ s) &= (const(head\ s)) \boxplus (psum(tail\ s))\end{aligned}$$

1. Ein $IntStream$ s ist *steep*, wenn der jeweils nächste Int größer ist als der vorherige, d.h.

   $$(head\ s) < head(tail\ s).$$

   Schreiben Sie eine Funktion $steep's$, die $True$ zurückgibt, wenn s *steep* ist. Hierfür ist folgendes Gerüst zu verwenden:

   $$\begin{aligned}&steep' = snd.\ fold\ c\ g \text{ where}\\ &\qquad c = \qquad\qquad :: (Nat, Bool)\\ &\qquad g = \qquad\qquad :: (Nat \to (Nat,\ Bool) \to (Nat,\ Bool)\end{aligned}$$

2. Irgendetwas mit Koinduktion zeigen

Aufgabe 5

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{z \bullet z^R \mid z \in \{0,1\}^*\},$$

dabei ist z^R die Spiegelung des Wortes z. Ist beispielsweise $z = 1100$, so ist $z^R = 0011$.

Ist L regulär? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck für L an und erläutern Sie, warum dieser L definiert. Andernfalls zeigen Sie mittels des Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist.