FAU Erlangen–Nürnberg
Department Mathematik
Prof. Dr. Carsten Gräser

23. Februar 2023

Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Ingenieure C1
WS 2022/2023

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben und einer Zusatzaufgabe auf zwei Seiten.

Zugelassene Hilfmittel sind ein doppelseitig beschriebenes A4 Blatt, eine Formelsammlung, ein nicht programmierbarer Taschenrechner, der weder mit komplexen Zahlen rechnen noch lineare Gleichungssysteme lösen kann. Alle weiteren schriftlichen und elektronischen Hilfsmittel sind **untersagt.**

1. Aufgabe (1+1+1+2+3+2 Punkte)

a) Geben Sie alle Elemente der Menge $(\{1,2,3\} \cap \{3,4\}) \times \{5,6\}$ an.

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die surjektiv aber nicht injektiv.

c) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die bijektiv ist.

d) Stellen Sie die Zahl $\frac{2+i}{1+i} + \frac{2-i}{1-i}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

e) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = -4$ und stellen Sie sie grafisch in der komplexen Ebene dar.

f) Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze aus der Vorlesung den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^3 + n^2 + n + 1}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Abschätzung $2 < 2^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe (4+4+2 Punkte)
Es seien Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie der Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

b) Berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $B\vec{x} = \vec{b}$.

c) Bestimmen Sie den Rang von B.

Bitte wenden!

4. Aufgabe (4+2+4 Punkte)

a) Berechnen Sie zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ der Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jeweils einen Eigenvektor.

b) Untersuchen Sie $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf Orthogonalität und berechnen Sie die Inverse C^{-1}.

c) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe (6 Punkte)
Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Aufgabe (3 Zusatzpunkte)
Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei die Matrix $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von C ist, wenn λ Eigenwert von A oder Eigenwert von B ist.

Ende der Klausur