Aussagenlogik

Grundbegriffe

Atome $A, B, C, \ldots$
Nicht weiter zerlegbare Aussage. Kann wahr ($\top$) oder falsch ($\bot$) annehmen. Bsp.: „esRegnet“

Wahrheitsbelegungen κ
$\kappa: \mathcal{A} \mapsto \{\top, \bot\}$ ist eine Abbildung, d.h. κ ordnet Atomen konkrete Wahrheitswerte ($\top$, $\bot$) zu.
Könnte z.B. sein: $\kappa[\text{esRegnet}] = \top$, $\kappa[\text{istAugust}] = \bot$

Prädikate $P, Q, R, \ldots$
Bsp.: „istKleiner(x, y)“. Ein Prädikat macht eine Aussage über Individuen (hier x und y) und gibt einen Wahrheitswert ($\top$, $\bot$) zurück, wenn es ausgewertet wird.
0-stelliges Prädikat $\equiv$ Atom

Funktionen $f, g, h, \ldots$
z.B. „mutter(x)“ gibt ein Objekt / ein Individuum zurück (hier die Mutter von x).
0-stellige Funktion $\equiv$ Konstante

Terme $D, E, F, \ldots$
Ein Term ist eine Instanz der Grammatik
$T ::= x \mid c \mid f\,(T, \ldots, T)$ (x: Variable, c: Konstante, f: Funktion)
Ergebnis der Auswertung eines Terms ist ein Objekt / Individuum.

Formeln $\phi, \psi, \ldots$
Eine Formel ist eine Instanz der Grammatik
$\phi, \psi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \rightarrow \psi \mid \forall x(\phi) \mid \exists x(\phi)$ (t: Term, x: Variable)
Ergebnis der Auswertung einer Formel mittels einer Wahrheitsbelegung ist ein Wahrheitswert.

Einige Äquivalenzen

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$

Negationsnormalform (NNF)

Formel in NNF, wenn “¬” nur vor Atomen vorkommt.
Jede Formel hat eine NNF.

NNF aus Formel erzeugen:

$\neg\neg\phi \equiv \phi$ (Negation aufheben)

$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$ (De Morgan)
$\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$ (De Morgan)

$\neg\top \equiv \bot$, $\neg\bot \equiv \top$

Konjunktive Normalform (CNF)

Beispiel: $(A \lor B \lor \neg C) \land (\neg A \lor C) \land (\neg A \lor \neg B)$

Jede Formel ϕ hat eine CNF.

CNF aus Grammatik erzeugen:

Literal:	L	$::= A \mid \neg A$	(A ist Atom)
Klausel:	C	$::= \bot \mid neC$	(leere Klausel $\equiv \bot$)
	neC	$::= L \mid L \lor neC$	
CNF:	ϕ	$::= \top \mid \psi$	(leere CNF $\equiv \top$)
	ψ	$::= C \mid C \land \psi$	

CNF aus NNF erzeugen:

$CNF(\phi \land \psi)$	$= CNF(\phi) \land CNF(\psi)$	
$CNF((\phi \land \psi) \lor \lambda)$	$= CNF(\phi \lor \lambda) \land CNF(\psi \lor \lambda)$	(Distributivgesetz)
$CNF(\phi)$	$= \phi$	(wenn ϕ Klausel, d.h. kein „$\land$“ enthält)

Disjunktive Normalform (DNF)

DNF aus NNF erzeugen:

$DNF(\phi \lor \psi)$	$= DNF(\phi) \lor DNF(\psi)$	
$DNF((\phi \lor \psi) \land \lambda)$	$= DNF(\phi \land \lambda) \lor DNF(\psi \land \lambda)$	(Distributivgesetz)
$DNF(\phi)$	$= \phi$	(wenn ϕ kein $\lor$ enthält)

Prädikatenlogik (Logik 1. Stufe)

Einige Äquivalenzen

$\neg\forall y(\phi) \equiv \exists y(\neg\phi)$

$\forall y(\phi) \equiv \neg\exists y(\neg\phi)$

Freie Variablen

= Variablen, die durch keinen Quantor gebunden sind

Berechnung der Menge der FV:

$FV(x)$	$= \{x\}$
$FV(\neg\phi)$	$= FV(\phi)$
$FV(E = D)$	$= FV(E) \cup FV(D)$
$FV(\phi \land \psi)$	$= FV(\phi) \cup FV(\psi)$
$FV(f(E_1, \dots, E_n))$	$= \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$
$FV(P(E_1, \dots, E_n))$	$= \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$
$FV(\forall x(\phi))$	$= FV(\phi) \setminus \{x\}$

Daraus folgt weiterhin:

$FV(\phi \lor \psi)$	$= FV(\phi) \cup FV(\psi)$
$FV(\exists x(\phi))$	$= FV(\phi) \setminus \{x\}$

Substitution

$\sigma = [E_1/x_1, \ldots, E_n/x_n]$ (ersetzt jeweils alle Var. x_i durch Term E_i , ließ „E_i statt x_i“)

Berechnung von $\phi\sigma$: (Substitution σ angewendet auf Formel ϕ)

$x\sigma$	$= \sigma(x)$	
$f(E_1, \ldots, E_n)\sigma$	$= f(E_1\sigma, \ldots, E_n\sigma)$	f kann Funktion oder Prädikat sein.
$(E = D)\sigma$	$= (E\sigma = D\sigma)$	
$(\neg\phi)\sigma$	$= \neg(\phi\sigma)$	
$(\phi \wedge \psi)\sigma$	$= (\phi\sigma \wedge \psi\sigma)$	
$(\phi \vee \psi)\sigma$	$= (\phi\sigma \vee \psi\sigma)$	
$(\forall x(\phi))\sigma$	$= \forall y(\phi\sigma')$	*
$(\exists x(\phi))\sigma$	$= \exists y(\phi\sigma')$	*

* Wobei $\sigma'(x)=y$, für alle anderen $z \neq x$ bleibt $\sigma'(z)=\sigma(z)$. Wähle y so, dass $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x(\phi)$ bzw. $\exists x(\phi))$! **Kurz gesagt**: Alle freien Var. in den Ersetzungen der freien Var. der linken Seite nicht als y wählen! Wenn erlaubt, wähle als y einfach komplett neuen Var.-Namen.

Pränexe Normalform (PNF)

Alle Quantoren $Q_n \in \{\forall, \exists\}$ stehen am Anfang der Formel: $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(\phi)$

<u>PNF aus NNF erzeugen:</u> wende erschöpfend an:

$\phi \wedge \exists x(\psi) \equiv \exists x(\phi \wedge \psi)$ $\phi \wedge \forall x(\psi) \equiv \forall x(\phi \wedge \psi)$
$\phi \vee \exists x(\psi) \equiv \exists x(\phi \vee \psi)$ * $\phi \vee \forall x(\psi) \equiv \forall x(\phi \vee \psi)$ *

* nur falls $x \notin FV(\phi)$. Dies kann durch Umbenennung erreicht werden:
Wende $[\tilde{x}/x]$ auf den Quantifizierten Teil an. Bsp.: $\phi \vee \exists x(\psi) \Rightarrow \phi \vee \exists \tilde{x}(\psi[\tilde{x}/x])$

Außerdem: $\forall x(P(x)) \wedge \forall x(Q(x)) \wedge \ldots \equiv \forall x\, (P(x) \wedge Q(x) \wedge \ldots)$

Skolemform

= PNF ohne „∃“, nur mit „∀“

Nicht zu jeder Formel existiert eine Skolemform. Allerdings lässt sich zu jeder Formel eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Skolemform berechnen.

ϕ und ψ erfüllbarkeitsäquivalent ↔ (ϕ erfüllbar ↔ ψ erfüllbar)
(Also die eine Formel erfüllbar gdw. die andere erfüllbar)

<u>Skolemisierung:</u> $\exists x(\phi)$ erfüllbar ↔ $\phi[c/x]$ (c frisch) erfüllbar

<u>Skolemform aus PNF erzeugen:</u>

$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y(\varphi) \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi[f_y(x_1, \ldots, x_n)/y])$ erschöpfend anwenden

Dabei für jedes y eine neue Skolem-Funktion f_y einführen. Diese hat als Parameter alle ∀-Quantifierten Variablen links vom zu eliminierenden „∃“ (also **nicht** die ∃-Quantifizierten). Falls keine „∀“s vor dem zu eliminierenden „∃“ stehen, ist f_y von eine nullstellige Funktion: Skolem-Konstante.

Klauselform

Sei $\psi \coloneqq Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(\phi)$ ein Skolemform (d.h. alle Q_n sind „∀“s). Wenn ϕ in CNF gebracht wurde, kann man die führenden „∀“s weglassen (bzw. implizit annehmen) und ϕ als Klauselmenge schreiben.

Unifikation

Gleichungssystem $S = \{E_1 \doteq E_2, E_3 \doteq E_4, \ldots\}$, wobei E_i Terme sind. S ist gelöst, falls

1. jede Gleichung die Form $v \doteq E$ hat, wobei v: Variable und E: Term
2. jedes solche v max. 1 mal auf einer linken Seite steht (nochmal in rechter Seite ist okay)

S lösen bzw. Unifizierbarkeit prüfen:

(delete):
$S \cup \{x \doteq x\} \quad \Rightarrow \quad S$

(decomp):
$S \cup \{ f(E_1, \ldots, E_n) \doteq f(D_1, \ldots, D_n) \} \quad \Rightarrow \quad S \cup \{ E_1 \doteq D_1, \ldots, E_n \doteq D_n \}$

(conflict):
$S \cup \{ f(E_1, \ldots, E_n) \doteq g(D_1, \ldots, D_k)\} \quad \Rightarrow \quad \bot$ (wenn $f \neq g$)

(orient):
$S \cup \{E \doteq x\} \quad \Rightarrow \quad S \cup \{x \doteq E\}$ (E *keine* Variable)

(occurs) / (elim):

$$S \cup \{x \doteq E\} \quad \Rightarrow \begin{cases} \bot & (x \in FV(E),\ x \neq E) \\ S[E/x] \cup \{x \quad E\} & (x \notin FV(E),\ x \in FV(S)) \end{cases}$$

Falls $\bot$ erreicht wird → “nicht unifizierbar“
Falls gelöste Form erreicht wird → mgu=$[E_1/x_1, E_2/x_2, \ldots]$ (aus $x_i \doteq E_i$ ablesen)

Resolution in FOL

Voraussetzung: ϕ in Klauselform
Halbentscheidungsverfahren für Unerfüllbarkeit von ϕ (terminiert ggf. nicht, wenn ϕ erfüllbar)

$$(RIF)\ \frac{C_1, A_1, \ldots, A_n \quad C_2, \neg B}{C_1\sigma, C_2\sigma} \qquad \left(\sigma = mgu(A_1 \doteq B, \ldots, A_n \doteq B)\right)$$

Erklärung: Der mgu macht $A_1, \ldots, A_n$ und $\neg B$ gleich, sodass diese wegresolviert werden. Übrig bleiben also $C_1\sigma$ und $C_2\sigma$ (denn σ wird natürlich auch hierauf angewendet).

Benenne vor Anwendung von RIF die Variablen in den ursprüngl. Klausen so um, dass diese disjunkt sind.

Wende RIF so lange an, bis □ erreicht oder RIF nicht mehr anwendbar.

Fitch / natürliche Deduktion

A, B: Terme
ϕ, ψ: Formeln
c: ein konkretes Subjekt

Not

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}\ (\neg\ \mathrm{I})$$

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\ \mathrm{E})$$

Bottom

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}\ (\bot\ \mathrm{I})$$

$$\frac{\bot}{\text{beliebig}}\ (\bot\ \mathrm{E})$$

Oder

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee\ \mathrm{I}_1)$$

$$\frac{B}{A \vee B}\ (\vee\ \mathrm{I}_2)$$

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{|l} B \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \quad A \vee B}{C}\ (\vee\ \mathrm{E})$$

Und

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge\ \mathrm{I})$$

$$\frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge\ \mathrm{E}_1)$$

$$\frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge\ \mathrm{E}_2)$$

Implikation

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow \mathrm{I})$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ (\rightarrow \mathrm{E})$$

Existenz

$$\frac{\phi[c/x]}{\exists x(\phi)}\ (\exists\ \mathrm{I})$$

$$\frac{\exists x(\phi) \quad \begin{array}{|l} \boxed{c}\ \ \phi[c/x] \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists\ \mathrm{E})$$

Für Alle

$$\frac{\begin{array}{|l} \boxed{c} \\ \hline \vdots \\ \phi[c/x] \end{array}}{\forall x(\phi)}\ (\forall\ \mathrm{I})$$

$$\frac{\forall x(\phi)}{\phi[c/x]}\ (\forall\ \mathrm{E})$$

Gleich

$$\frac{}{A = A}\ (=\mathrm{I})$$

$$\frac{\phi[A/x] \quad A = B}{\phi[B/x]}\ (=\mathrm{E})$$

Induktion

„Normale“ Induktion: „zusammenbauen, zeige dass nach jeder Vergrößerung z.Z. noch gilt“

I.A. Zeige, dass z.Z. gilt für einfachste(s) Element(e).

I.V. Seien beliebige(s) Element(e) A, B, … welche z.Z. schon erfüllen gegeben.

I.S. Sei X beliebiges Element. (anders als A, B, … erfüllt X z.Z. noch nicht unbedingt)

Fallunterscheidung:
- X hat Form aus I.A. → z.Z. gilt
- X hat Form I (*)
- X hat Form II (*)

(*) Für jede Art (ggf. mehrere, hier zwei), auf die man Element(e) zu einem nächst-komplexeren/größeren „zusammenbauen“ kann:
Zeige, dass das Komplexere dann immernoch z.Z. erfüllt. „Verbaue“ dabei die A, B, … aus der I.V., denn von diesen weiß man ja schon, dass sie z.Z. erfüllen.

Strukturelle Induktion „auseinandernehmen, rekursiv auf einfachste Fälle zurückführen“

I.A. Zeige für alle einfachsten Fälle, dass sie z.Z. erfüllen.

I.V. Braucht man meist nicht!

I.S. Sei X beliebiges Element. Gehe alle Fälle durch, von welcher Form X sein könnte:
a) X hat Form aus I.A. → z.Z. gilt
b) X hat „zusammengebaute“ Form (ggf. mehrere Arten, dann mehrere Fälle)
Argumentiere, dass einige Bestandteile wieder beliebige Elemente sind, genau wie X, und deshalb diese Fallunterscheidung rekursiv angewendet werden kann, wobei man (da X endlich groß etc…) stets irgendwann auf den Fall a) stößt und dann z.Z. gilt.
Die Bestandteile erfüllen also z.Z. Beweise jetzt noch, dass für jede Art, sie zusammenzubauen („Rekursionsschateln abbauen“) wieder z.Z. gilt.

StuvePad Course-Of-Values-Induktion

Zu zeigen: $\forall n(P(n))$
BNF bilden, bestehend aus Signatur und einer Alternative für eine Variable
z.B. $E, E_1, E_2 ::= mult(E_1, E_2) \mid zero() \mid v$ (mit v: Variable)

I.A. Zeige, dass P für v und Konstanten gilt

I.V. Course-of-Values-Induktion. k, n: Terme. “<” vergleicht Länge der Terme.
$\forall n\ (\ \forall k<n(P(k)) \rightarrow P(n)\ )$

I.S. Sei ein Term n (Instanz der BNF) gegeben. Es gelte $\forall k \leq n(P(n))$. z.Z.: $\forall k \leq n+1(P(n))$
Brich die Aussage auf die beteiligten Terme herunter (→ Seite 35 im Skript).
Dank Induktions-Voraussetzung wissen wir, dass die zu beweisende Aussage bereits für die beteiligten Terme (die Bestandteile) gilt.
Bilde daraus die benötigte Folgerung, also zeige, dass dann für „Zusammengesetztes“ auch die zu beweisende Annahme gilt.

Verschiedenes

Aristotelische Formen:

Alle Ps sind Qs:	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	„∀ mit →“
Einige Ps sind Qs:	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	„∃ mit ∧“

Modelle / Semantik

Ein **Σ-Modell 𝔐** besteht aus:

- einer nichtleeren **Trägermenge M**.
- Einer **Interpretation** für jedes n-stellige Funktionssymbol $f/n \in \Sigma$, durch eine Funktion $\mathfrak{M}[\![f]\!]: M^n \mapsto M$
- Einer **Interpretation** für jedes n-stellige Prädikatsymbol $P/n \in \Sigma$, durch eine Teilmenge $\mathfrak{M}[\![P]\!] \subseteq M^n$

Eine **Umgebung η** ist eine Abbildung $\eta: V \mapsto M$,
ordnet jeder Variablen $v \in V$ einen Wert $m \in M$ der Trägermenge zu.

Ein spezielles Σ-Modell ist das **Herbrand-Modell**, in diesem gibt es keine Variablen in den Termen. Deshalb ist η dann leer und kann weggelassen werden.

Interpretation eines Terms E berechnen:

$$\mathfrak{M}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$$

$$\mathfrak{M}[\![f(E_1, \dots, E_n)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![f]\!]\eta\,(\mathfrak{M}[\![E_1]\!]\eta, \dots, \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta)$$

Erfülltheit einer Formel prüfen: Erfülltheit von ϕ durch 𝔐 und η (kurz $\mathfrak{M}, \eta \vDash \phi$):

$\mathfrak{M}, \eta \vDash (E = D) \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![D_n]\!]\eta$

$\mathfrak{M}, \eta \vDash P(E_1, \dots, E_n) \quad \leftrightarrow \quad (\mathfrak{M}[\![E_1]\!]\eta, \dots, \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta) \in \mathfrak{M}[\![P]\!]$

$\mathfrak{M}, \eta \vDash \forall x(\phi) \quad \leftrightarrow \quad$ für alle $m \in M$ gilt: $\mathfrak{M}, \eta[x \mapsto m] \vDash \phi$

wobei $\eta[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & \text{für } y = x \\ \eta(y) & \text{sonst} \end{cases}$